期末复习：有限群的线性表示论

Tautochrone

December 7, 2021

Contents

有限群的表示论是群论和线性代数结合的产物。群是从“对称性”中抽象出来的代数结构。群表示论的核心课题，就是找到群在向量空间上的所有线性表示。

这门课的前置课程是**线性代数**，**群论**，**环论**和**模论**，并且会在最后一章涉及微量的**交换代数**和 **Galois 理论**。在整个笔记中，k 指代基域。G 指代一个有限群。在特征标理论中，我们只研究 $k=\mathbb{C}$ 的情况。V 指代一个 k 上的有限维向量空间。令 $\mathrm{GL}(V)$ 为 V 上全体可逆线性变换构成的群。

若不加声明，所有向量空间均为 k 上的向量空间，当我们谈及维数时，均指 k 上的维数。例如当我们说“n 维 $k[G]$ 模 V”，实际上是指 $\dim V=n$。当我们谈及模和群作用时，不加声明的都指代左模和左作用。

1 表示与群代数

定义 1.1. 表示

设 G 是有限群，V 是有限维向量空间。G 在 V 上的一个表示是指一个群同态

$$\rho: G\to \mathrm{GL}(V)$$

其中表示 ρ 的**次数**即 V 的维数 $\dim V$。若 $\ker\rho=\{e_G\}$，则称 ρ 是**忠实的**。

我们接下来将证明，给定一个 V 上群 G 的 k 表示，等价于在 V 上定义一个 $k[G]$ 模结构，其中将要定义的 $k[G]$ 是群 G 在域 k 上的群代数。群代数可以视为 G 在 k 上的"线性扩充"。

定义 1.2. 群代数

设 G 是有限群。考虑 k 上以 G 为基自由生成的向量空间：

$$k[G] := \left\{ \sum_{g\in G} a_g g : \ a_g \in k \right\}$$

其上可定义乘法结构：

$$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right)\left(\sum_{h\in G} b_h h\right) = \sum_{g\in G}\sum_{h\in G}(a_g b_h)(gh) = \sum_{g\in G}\left(\sum_{h\in G} a_h b_{h^{-1}g}\right) g$$

可以验证，这个乘法与 k 上的标量乘法相容。于是 $k[G]$ 就成为 k 上的一个代数。

表示 $\rho : G \to \mathrm{GL}(k)$ 可以线性地扩充到 $k[G]$ 上。定义 $\rho^* : k[G] \to \mathrm{End}_k(V)$：

$$\rho^*\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) := \sum_{g\in G} a_g \rho(g)$$

易验证 ρ^* 是从 $k[G]$ 到 $\mathrm{End}_k(V)$ 的 k 代数同态。于是 ρ^* 定义了 V 上的一个左 $k[G]$ 模结构：

$$\sum_{g\in G} a_g g \cdot v := \rho^*\left(\sum_{g\in G} a_g g\right)(v) = \sum_{g\in G} a_g \rho(g)(v), \qquad v \in V,\ a_g \in k,\ g \in G$$

反过来，设 k 向量空间 V 是一个左 $k[G]$ 模。则 V 上有自然的群同态 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$，由如下方式给出：

$$\rho(g)(v) := g \cdot v, \qquad v \in V,\ g \in G$$

这是群 G 在 V 上的一个 k 表示。

这样，我们就把左 $k[G]$ 模和群 G 的 k 表示自然对应了起来。以后我们会不加声明地交换使用这两个概念。

接下来给出一些群表示的重要栗子。

例 1.3. 群表示的例子

设 G 是一个有限群。

1. **平凡表示：** 群表示 $\mathbf{1}_G : G \to \mathrm{GL}(V)$ 满足对于任意 $g \in G$，$\mathbf{1}_G(g)(v) = v$，称为 G 的平凡表示。
2. **矩阵表示：** 群表示 $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(k) \cong M_n(k)^\times$ 称为 G 的一个矩阵表示。
3. **置换表示：** 设 X 是一个有限集。考虑 k 上以 X 为基自由生成的向量空间：

   $$k^{\oplus X} = \left\{ \sum_{x\in X} a_x x : \ a_x \in k \right\}$$

   一个群作用 $\rho : G \to \mathrm{Sym}(X)$ 可以线性地扩充成一个群表示 $\tilde{\rho} : G \to \mathrm{GL}\left(k^{\oplus X}\right)$，由如下方式给出：

   $$\rho(g)\left(\sum_{x\in X} a_x x\right) := \sum_{x\in X} a_x (g\cdot x)$$

   ρ 称为 G 的一个置换表示。
4. **正则表示：** 群表示 $\rho : G \to \mathrm{GL}(k[G])$ 满足 $\rho(g)\left(\sum_{h\in G} a_h h\right) = \sum_{h\in G} a_h gh$，称为 G 的 (左) 正则表示。$k[G]$ 自身是一阶左 $k[G]$ 自由模，称为左正则 $k[G]$ 模，它的子模就是 $k[G]$ 的左理想。

群表示之间有同态映射：

定义 1.4. 表示同态

设 $\rho: G \to \mathrm{GL}(V)$ 和 $\sigma: G \to \mathrm{GL}(W)$ 是群 G 的两个表示。若线性映射 $\varphi: V \to W$ 使得对于任意 $g \in G$，如下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & W \\ {\scriptstyle \rho(g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma(g)} \\ V & \xrightarrow{\varphi} & W \end{array}$$

即 $\sigma(g) \circ \varphi = \varphi \circ \rho(g)$，则称 φ 是表示 ρ 与 σ 之间的同态。若 φ 是双射，则称之为**表示同构**。

用模论的语言，表示同态 $\varphi: V \to W$ 给出了左 $k[G]$ 模 V 与 W 之间的一个模同态：

$$\varphi\left(\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) \cdot v\right) = \sum_{g\in G} a_g(\varphi \circ \rho(g))(v) = \sum_{g\in G} a_g(\sigma(g) \circ \varphi)(v) = \left(\sum_{g\in G} a_g g\right) \cdot \varphi(v)$$

群表示有子表示和商表示：

定义 1.5. 稳定子空间

设 $\rho: G \to GL(V)$ 是一个群表示，它定义了 V 上的一个左 $k[G]$ 模结构。设 $U \leqslant V$ 是一个 V 的子空间。若对于任意 $g \in G$ 和 $v \in U$，有 $\rho(g)(v) \in U$，那么 U 称为 V 的 G **稳定子空间**。

定义 1.6. 子表示，商表示

设 $\rho: G \to GL(V)$ 是一个群表示。$U \leqslant V$ 是 G 稳定子空间。

1. 由 U 提供的 ρ 的**子表示**，是指群同态 $\rho_U: G \to \mathrm{GL}(V)$，满足 $\rho_U(g)(u) := \rho(g)(u)$ 对所有 $g \in G$ 和 $u \in U$ 成立。换言之，子空间 U 是 V 的左 $k[G]$ 子模。
2. 由 U 提供的 ρ 的**商表示**，是指群同态 $\rho_{V/U}: G \to \mathrm{GL}(V/U)$，满足 $\rho_{V/U}(g)(v+U) := \rho(g)(v) + U$ 对所有 $g \in G$ 和 $v \in V$ 成立。换言之，商空间 V/U 是 V 的左 $k[G]$ 商模。

定义 1.7. 既约表示

若表示 $\rho: G \to GL(V)$ 没有非平凡真 G 稳定子空间，则称之为既约表示。换言之，作为左 $k[G]$ 模，V 是单模。

表示论的核心就是在至多同构的情况下找到群 G 的所有既约表示。

接下来我们给出表示论的第一个有趣的结论：

定理 1.8. Maschke 定理

设 G 是有限群，且 $\operatorname{char} k \nmid |G|$。设 V 是 $k[G]$ 模，$U \leqslant V$ 是 V 的 $k[G]$ 子模。则存在 V 的 $k[G]$ 子模 W 使得 $V = U \oplus W$。

Proof. 首先设 Z 是 V 中关于 U 的一个线性补空间，即 $V = U \oplus Z$。设 $\pi_U: V \to V$ 是这个直和分解到 U 上的投影。即对 $u \in U$ 和 $z \in Z$ 有 $\pi_U(u+z) = u$。由 $|G|1_k \neq 0$，可以定义线性变换 $\varphi: V \to V$

$$\varphi(v) := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \rho(g) \circ \pi \circ \rho(g^{-1})(v)$$

容易验证 φ 是一个 $k[G]$ 模同态，且 φ 也是一个从 V 到 U 的投影。设 $W := \ker\varphi$，则由模的第一同构定理，W 是 V 的 $k[G]$ 子模。且由投影的性质有

$$V = \operatorname{im}\varphi \oplus \ker\varphi = U \oplus W$$

□

命题 1.9. 半单模，完全可约表示

设 A 是 k 代数，V 是左 A 模，且 $V \neq \{0\}$。以下命题等价：

1. 存在 V 的一族单 A 子模 $\{U_i : i \in I\}$，使得 $V = \bigoplus_{i \in I} U_i$；
2. 对 V 的任意 A 子模 U，都存在 A 子模 W 使得 $V = U \oplus W$。

满足以上条件的 A 模称为**半单模**或者**完全可约模**。对于群代数 $A = k[G]$，V 上提供的表示 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ 称为**完全可约表示**。

Proof. $1 \Longrightarrow 2$：设 U 是 V 的子模。由 Zorn 引理存在一个 (集合包含意义下的) 极大子模 W 使得 $U \cap W = \{0\}$。我们要证 $V = U \oplus W$。如不然，则存在一个单子模 $U_i \not\subseteq U \oplus W$。于是 $U_i \cap (U \oplus W) = \{0\}$，即 $U \cap (U_i \oplus W) = \{0\}$。这与 W 的极大性矛盾。因此 $V = U \oplus W$。

$2 \Longrightarrow 1$：首先我们证明 V 有至少一个单 A 子模。固定 $v \in V \setminus \{0\}$，于是 Av 是 V 的一个循环子模。考虑 A 的一个极大左理想 I，则 Iv 是一个 Av 的一个极大子模。由题设存在 V 的另一个子模 W 使得 $V = Iv \oplus W$，于是

$$Av = Av \cap V = Av \cap (Iv \oplus W) = Iv \oplus (Av \cap W)$$

因此有 A 模同构：

$$Av \cap W \cong Av/Iv \cong (A/I)v$$

其中 $(A/I)v$ 是单 A 模由 I 的极大性。故 $Av \cap W$ 是 V 的子单模。

考虑集族及其上定义的偏序：

$$\mathcal{S} := \left\{ \{U_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{P}(V) : \ U_i \leqslant V \text{ 是单模，且} \sum_{i \in I} U_i = \bigoplus_{i \in I} U_i \right\}$$

$$\{U_i : i \in I\} \leqslant_{\mathcal{S}} \{U_i : i \in J\} \iff I \subseteq J$$

由前面的论述有 $\mathcal{S} \neq \varnothing$，因此 Zorn 引理推出 $\mathcal{S}$ 有一个极大元 $\{U_i : i \in K\}$。由题设存在 V 的另一个子模 Z 使得

$$V = \left(\bigoplus_{i \in K} U_i \right) \oplus Z$$

由 $\{U_i : i \in K\}$ 的极大性，Z 是 V 的单子模，因此命题得证。 □

从完全可约表示的定义和 Maschke 定理我们有如下推论：

推论 1.10

设 G 是有限群，且 $\mathrm{char}\, k \nmid |G|$。则每个有限维表示 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ 都是完全可约的。

定义 1.11. 半单代数

设 A 是域 k 上的代数。若 A 的左模都是完全可约的，则称 A 是半单代数。

推论 1.12

设 G 是有限群，且 $\mathrm{char}\, k \nmid |G|$。则群代数 $k[G]$ 是半单代数。

研究群表示 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$，等价于研究 $k[G]$ 模的结构。由 Maschke 定理，$k[G]$ 是半单代数。因此我们在下一节构建关于半单代数的理论，并以此研究群表示的结构。

2 半单代数的结构

在本章中，A 指代一个有限维 k 代数。

下面的引理看似显然成立，但是却能在之后导出一些有趣的结论。

引理 2.1

设 V, W 是 A 上的单模。则每个 A 模同态 $\varphi: V \to W$ 要么是零映射，要么是模同构。

Proof. 由模的第一同构定理和单模的定义显然。 □

引理 2.2

每个循环 A 模 V 都同构于左正则 A 模的一个商模：若 $V = Av$，则 $V \cong A/\operatorname{ann}_A(v)$，其中 $\operatorname{ann}_A(v) := \{a \in A : av = 0\}$。

Proof. A 模同态 $\varphi: A \to V$，$a \mapsto av$ 是满射。由模的第一同构定理，有

$$V = \operatorname{im}\varphi \cong A/\ker\varphi = A/\operatorname{ann}_A(v)$$ □

注. 注意到每个 A 上的单模 V 都是循环模，因此以上引理说明每个单 A 模都同构于左正则 A 模的一个商模。

定理 2.3. Schur 引理

设 k 是**代数闭域**，V 是 A 上的单模。则每个 V 上的 A 模自同态都是一个标量乘法 $\lambda \in k$。即对于 $\varphi \in \operatorname{End}_A(V)$，存在 $\lambda \in k$ 使得对任意 $v \in V$，有 $\varphi(v) = \lambda v$。特别地，有 $\operatorname{End}_A(V) = k \operatorname{id}_V$.

Proof. 由引理 2.2，V 同构于 A 的一个商模。于是 V 是 k 上的有限维向量空间。设 $\varphi \in \operatorname{End}_A(V)$，则 φ 是 V 上的 k 线性变换。由于 k 是代数闭域，φ 有本征值 $\lambda \in k$。于是 $\varphi - \lambda \operatorname{id}_V \in \operatorname{End}_A(V)$ 有非平凡零空间，因此不是同构。由引理 2.1，$\varphi - \lambda \operatorname{id}_V = 0$。故 $\varphi = \lambda \operatorname{id}_V$。 □

2.1 半单代数上的单模

命题 2.4

设 A 是域 k 上的**有限维**半单代数。A 上的左单模在同构意义下只有有限多个。

Proof. 将 A 能分解成单 A 子模 V_i 的直和：

$$A = \bigoplus_{i=1}^{r} V_i$$

设 V 是一个单 A 模。固定 $v \in V \setminus \{0\}$。设模同态 $\varphi: A \to V$ 由 $\varphi(a) := av$ 给出。设 $\varphi_i := \varphi|_{V_i}$。直和分解式 $a = \sum_{i=1}^{r} a_r$，$a_i \in V_i$，给出了 $\varphi(a)$ 的分解：

$$\varphi(a) = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i(a_i)$$

由于 φ 非零，至少有某个 $\varphi_i: V_i \to V$ 非零。由引理 2.1，φ_i 是模同构。于是 V 同构于 $V_1, \ldots, V_r$ 中的一个单 A 模。故 A 上的单模在同构意义下只有有限多个。 □

接下来我们研究 A 作为环的幂等元。

定义 2.5. 环的中心，幂等元

$Z(A) := \{z \in A : \forall a \in A\ az = za\}$ 称为 A 的中心。它是 A 的一个含幺子环。

若 $e \in A$ 满足 $e^2 = e$，则称之为 A 的一个幂等元；若 $e \in Z(A)$，则称之为**中心幂等元**。若幂等元 $e_1, \ldots, e_n \in A$ 满足 $e_i e_j = e_j e_i = e_i \delta_{ij}$，则称他们是**正交的**。

命题 2.6

设 A 是域 k 上的**有限维**半单代数。则存在一组正交的幂等元 $e_1, ..., e_r \in A$ 使得

$$1_A = \sum_{i=1}^{r} e_i, \qquad A = \bigoplus_{i=1}^{r} Ae_i$$

Proof. 设 A 能分解成单 A 子模 V_i 的直和：

$$A = \bigoplus_{i=1}^{r} V_i$$

将单位元沿着该直和分解：

$$1_A = \sum_{i=1}^{r} e_i, \qquad e_i \in V_i$$

注意到从直和的性质出发有

$$e_i = e_i 1_A = \sum_{j=1}^{r} e_i e_j \implies e_i e_j = e_i \delta_{ij}$$

故 $e_1, ..., e_r$ 是一组正交幂等元。对于 $v_i \in V_i$，根据直和，有

$$v_i = v_i 1_A = \sum_{j=1}^{r} v_i e_j = v_i e_i \in Ae_i$$

故 $V_i \subseteq Ae_i$。而显然 $Ae_i \subseteq V_i$，因此 $V_i = Ae_i$，有

$$A = \bigoplus_{i=1}^{r} Ae_i$$

□

下面的命题说明代数的半单性只取决于它的左正则模。

命题 2.7

设 A 是域 k 上的**有限维**代数。A 是半单代数当且仅当 A 上的左正则模是完全可约的。

Proof. 必要性显然成立，下面证充分性。

设 A 上的左正则模是完全可约的。注意到命题 2.6 的证明只用到了左正则模 A 的完全可约性。于是能将 A 的单位元分解成正交幂等元的和：

$$1_A = \sum_{i=1}^{r} e_i, \qquad A = \bigoplus_{i=1}^{r} Ae_i$$

设 M 是一个左 A 模。任取 M 的子模 N，由 Zorn 引理存在一个 M 的极大子模 L 满足 $N \cap L = \{0\}$。我们要证 $M = N \oplus L$。如不然，则存在 $x \in M$ 使得 $x \notin N \oplus L$。注意到

$$x = 1_A x = \sum_{i=1}^{r} e_i x \in \bigoplus_{i=1}^{r} Ae_i x$$

因此存在 $j \in \{1, ..., n\}$ 使得 $Ae_j x \not\subseteq N \oplus L$。注意到 $\varphi_j : Ae_j \to Ae_j x$，$ae_j \mapsto ae_j x$ 是 A 模满同态。由引理 2.1，有模同构 $Ae_j \cong Ae_j x$。$Ae_j x$ 是单模。于是 $(N \oplus L) \cap Ae_j x = \{0\}$，即 $N \cap (L \oplus Ae_j x) = \{0\}$，这与 L 的极大性矛盾。于是 M 是完全可约的 A 模。 □

2.2 半单代数的中心

在 2.2 节与 2.3 节我们固定 A 为 k 上的一个有限维半单代数。令 $V_1, ..., V_r$ 为（互不同构的）全部的单 A 模。我们固定左正则模 A 的一个直和分解：

$$A = \bigoplus_{i=1}^{r} B_i = \bigoplus_{i=1}^{r} \bigoplus_{j=1}^{n_i} L_{ij} = \bigoplus_{i=1}^{r} \bigoplus_{j=1}^{n_i} Ae_{ij}$$

其中 $L_{ij} \cong V_i$ 是 A 的单子模，因此 $\{e_{ij} \in A :\ 1 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant n_i\}$ 是一组正交幂等元。注意到由模的 Jordan-Hölder 定理，这个直和分解在置换的意义下是唯一的。此外，每个 $n_i \geqslant 1$，因为每个单模都同构于 A 的一个子模。

引理 2.8

$B_1, ..., B_r$ 是 A 作为环的双边理想。

Proof. 由定义 $B_1, ..., B_n$ 是 A 的子模，因此是左理想。只要证它们是右理想。固定 $a \in A$，考虑 $L_{ij} \subseteq B_i$。考虑沿着前述直和的投影 $\pi_{k\ell} : A \twoheadrightarrow L_{k\ell}$，以及模同态 $r_a \in \mathrm{End}_A(A)$，$r_a(v) \mapsto va$。对 $v \in L_{ij}$，有

$$r_a(v) = va = \sum_{k=1}^{r} \sum_{\ell=1}^{n_k} vae_{k\ell} = \sum_{k=1}^{r} \sum_{\ell=1}^{n_k} \pi_{k\ell} \circ r_a(v)$$

对 $k \neq i$，模同态 $(\pi_{k\ell} \circ r_a)\big|_{L_{ij}} : L_{ij} \to L_{k\ell}$ 是零映射，因为 $L_{ij} \ncong L_{k\ell}$ 以及引理 2.1。因此

$$va \in \sum_{\ell=1}^{n_i} \pi_{i\ell} \circ r_a(v) \in B_i \implies L_{ij}a \subseteq B_i \implies B_i a \subseteq B_i$$

故 B_i 是 A 的右理想。 □

推论 2.9

$\dim Z(A) \geqslant r$，其中 r 是 A 的单模的个数。

Proof. 设 $e_i := \sum_{j=1}^{n_i} e_{ij}$。由于 $B_i = \bigoplus_{j=1}^{n_i} Ae_{ij} = Ae_i$ 是 A 的双边理想，$e_i \in B_i$ 是一个中心幂等元。于是 $\{e_1, ..., e_r\}$ 是一组正交中心幂等元。特别地它们在 k 上线性无关。故 $\dim Z(A) \geqslant r$。 □

定理 2.10

设 k 是代数闭域。则 $\dim Z(A) = r$，其中 r 是 A 的单模的个数。

Proof. 由推论 2.9，只要证 $\dim Z(A) \leqslant r$。对于 $z \in Z(A)$，z 在 V_i 上的作用给出了一个 V_i 的 A 模自同态，由 Schur 引理，这个作用等价于乘上一个标量 $z_V \in k$。由此给出的 k 代数同态 $Z(A) \to k$，$z \mapsto z_V$ 称为**中心特征标**。相应地，我们也能定义 k 线性映射 $\psi : Z(A) \to k^r$，$\psi(z) = (z_{V_1}, ..., z_{V_r})$。对 $z \in Z(A)$，有

$$z = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n_i} ze_{ij} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n_i} z_{V_i} e_{ij}$$

因此 ψ 是单射。有 $\dim Z(A) \leqslant \dim k^r = r$。 □

命题 2.11

设 G 是有限群。$C_1, ..., C_s$ 是 G 的全部共轭类。对共轭类 C_i，定义**共轭类和**

$$\widehat{C}_i := \sum_{x \in C_i} x \in k[G]$$

则 $\{\widehat{C}_1, ..., \widehat{C}_s\}$ 是 $Z(k[G])$ 作为 k 向量空间的一组基。因此有 $\dim Z(k[G]) = s$。

Proof. 先证 $\widehat{C}_i \in Z(k[G])$。对 $g \in G$，$\rho_g : C_i \to C_i$，$x \mapsto g^{-1}xg$ 是一个双射。于是

$$\widehat{C}_i g = \sum_{x \in C_i} xg = \sum_{x \in C_i} g\rho_g(x) = \sum_{x \in C_i} gx = g\widehat{C}_i$$

把上式线性地扩展到 $k[G]$ 上即可。

由于共轭类不交，$\{\widehat{C}_1, ..., \widehat{C}_s\}$ 线性无关，只要证它张成 $Z(k[G])$。对于 $\sum_{g \in G} a_g g \in Z(k[G])$，注意到

$$\forall\, h \in G : \quad \sum_{g \in G} a_g g = h^{-1} \left(\sum_{g \in G} a_g g \right) h = \sum_{g \in G} a_g (h^{-1}gh) = \sum_{g \in G} a_g \rho_h(g) = \sum_{g \in G} a_{\rho_h^{-1}(g)} g$$

因此 $a_g = a_{\rho_h^{-1}(g)}$。特别地，对于共轭的 g, h 有 $a_g = a_h$。故 $\{\widehat{C}_1, ..., \widehat{C}_s\}$ 张成 $Z(k[G])$：

$$\sum_{g\in G} a_g g = \sum_{i=1}^{s} \sum_{g\in C_i} a_i g = \sum_{i=1}^{s} a_i \widehat{C}_i$$

□

推论 2.12

代数闭域上有限群 G 既约表示的个数恰好等于 G 的共轭类的个数。

Proof. 结合定理 2.10 和命题 2.11 可得。 □

2.3 Artin-Wedderburn 定理

命题 2.13

每个 B_i 都是带有单位元 $e_i := \sum_{j=1}^{n_i} e_{ij}$ 的环。有环同构：

$$(A, 1_A) \cong (B_1, e_1) \times \cdots \times (B_n, e_n)$$

更进一步，每个 B_i 都是 k 上的半单代数，有唯一的单模 V_i。

Proof. 由引理 2.8，B_i 是 A 双边理想，其上的幂等元 e_i 是中心幂等元，并且有 $ae_i = e_i a = a$ 对于所有 $a \in B_i$ 成立。于是 (B_i, e_i) 是含幺环。（但注意 B_i 不是 A 的含幺子环，因为 $e_i \neq 1_A$）那么 $a \mapsto (ae_1, ..., ae_r)$ 给出了环同构 $(A, 1_A) \to (B_1, e_1) \times \cdots \times (B_n, e_n)$。

固定 $\ell \in \{1, ..., n_i\}$，考虑 $L_{i\ell}$ 的一个 B_i 子模 U。有

$$AU = \left(\bigoplus_{j=1}^{r} B_j\right) U = B_i U \leqslant U$$

因为对 $i \neq j$，$B_j U \leqslant B_j B_i = B_j e_j \cdot e_i B_i = 0$。于是 U 也是 A 模，因此 $U = L_{i\ell}$ 或 $U = 0$，故 U 是单 B_i 模。因为 $B_i = \bigoplus_{j=1}^{n_i} L_{ij}$ 且 $L_{ij} \cong V_i$，B_i 是半单代数，因此由命题 2.4 的证明，V_i 是 B_i 上的唯一单模。 □

命题 2.14

设 B 是 k 上的半单代数，有唯一的单模 V。若 $B \cong V^n$，则有 k 代数同构 $B \cong M_n(D^{\mathrm{op}})$，其中 $D := \mathrm{End}_B(V)$ 是一个除环，D^{op} 表示 D 的反环。[a]

[a] 环 R 的反环 R^{op} 是 Abel 群 R 上装配了乘法 $\star$，使得对于任意 $a, b \in R^{\mathrm{op}}$ 有 $a \star b := ba$，容易验证这是与 R 同构的一个环。

Proof. 由引理 2.1，$D = \mathrm{End}_B(V)$ 的每个非零元素都是 V 上的 B 模自同构，因此可逆。故 D 是除环。

首先我们证环同构 $B \cong \mathrm{End}_B(B)^{\mathrm{op}}$：对 $a \in B$，定义右乘 $r_a \in \mathrm{End}_B(B)$，$r_a(b) = ba$。容易验证 $a \mapsto r_a$ 是从 B 到 $\mathrm{End}_B(B)^{\mathrm{op}}$ 的环同构。

有 B 模同构 $B \cong V^n$，考虑嵌入 $\iota_i : V \to B$ 和投影 $\pi_i : B \to V$。定义 $\rho : \mathrm{End}_B(B) \to M_n(D)$ 如下：

$$\rho(f) := \{f_{ij}\}_{i,j=1}^{n} = \{\pi_i \circ f \circ \iota_j\}_{i,j=1}^{n}$$

容易验证这是个环同构。最后有

$$B \cong \mathrm{End}_B(B)^{\mathrm{op}} \cong M_n(D)^{\mathrm{op}} \cong M_n(D^{\mathrm{op}})$$

□

结合前两条命题，我们得到了著名的 Artin-Wedderburn 定理：

定理 2.15. Artin-Wedderburn 定理

设 A 是域 k 上的有限维半单代数。则存在除环 $D_1, ..., D_r$ 和 $n_1, ..., n_r \in \mathbb{Z}_+$ 使得存在如下的 k 代数同构：

$$A \cong M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_r}(D_r)$$

在代数闭域上，结合 Schur 引理我们能更进一步：

推论 2.16. 代数闭域上的 Artin-Wedderburn 定理

设 A 是代数闭域 k 上的有限维半单代数。则存在 $n_1, ..., n_r \in \mathbb{Z}_+$ 使得存在如下的 k 代数同构：

$$A \cong M_{n_1}(k) \times \cdots \times M_{n_r}(k)$$

Proof. 由 Schur 引理，有 k 代数同构 $D = \mathrm{End}_B(B) \cong k$。在命题 2.14 的代数同构中，我们更进一步有

$$B \cong M_n(D^{\mathrm{op}}) \cong M_n(k^{\mathrm{op}}) \cong M_n(k)$$

于是

$$A \cong M_{n_1}(D_1^{\mathrm{op}}) \times \cdots \times M_{n_r}(D_r^{\mathrm{op}}) \cong M_{n_1}(k) \times \cdots \times M_{n_r}(k)$$

□

利用 Artin-Wedderburn 定理，可以研究代数闭域 k 上 G 的既约表示的结构。

引理 2.17

矩阵环 $M_n(k)$ 是半单代数，其上唯一的单模同构于 k^n。$M_n(k)$ 有左理想直和分解：

$$M_n(k) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} M_n(k)E_{ii}$$

其中 $E_{ii} \in M_n(k)$ 只有第 (i, i) 个元素为 1，其余元素为 0。每个左理想 $M_n(k)E_{ii}$ 都 $M_n(k)$ 模同构于 k^n。

Proof. 由线性代数知识易证。 □

定理 2.18

设 k 是代数闭域，且 $\mathrm{char}\, k \nmid |G|$。设 $V_1, ..., V_r$ 是全部互不同构的 $k[G]$ 上的单模。则有 $k[G]$ 模同构：

$$k[G] \cong \bigoplus_{i=1}^{r} V_i^{\dim V_i}$$

特别地，有 $|G| = \sum_{i=1}^{r} (\dim V_i)^2$。

Proof. 由 Maschke 定理，$k[G]$ 是半单代数。由 Artin-Wedderburn 定理，有 k 代数同构

$$k[G] \cong M_{n_1}(k) \otimes \cdots \otimes M_{n_r}(k)$$

其中每个 $M_{n_i}(k)$ 都是单代数，有唯一的单模 V_i，由引理 2.17 有 $M_{n_i}(k)$ 模同构 $M_{n_i}(k) \cong V_i^{n_i}$。因此 $n_i = \dim V_i$。于是有 $k[G]$ 模同构

$$k[G] \cong \bigoplus_{i=1}^{r} V_i^{n_i} \cong \bigoplus_{i=1}^{r} V_i^{\dim V_i}$$

特别地，$|G| = \dim k[G] = \sum_{i=1}^{r} (\dim V_i)^2$。 □

3 Abel 群的既约复表示：Pontryagin 对偶

对于 Abel 群的既约表示，有如下简单的结论：

命题 3.1

设 G 是有限 Abel 群，k 是代数闭域。则 G 的所有既约 k 表示都是一次的。换言之，所有 $k[G]$ 上的单模都是一维的。

Proof. 设 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ 是一个既约表示，则 V 是个单 $k[G]$ 模，且 $\rho^* : k[G] \to \mathrm{End}_k(V)$ 是 k 代数同态。对 $g, h \in G$ 和 $v \in V$，因为 G 是 Abel 群，

$$\rho^*(g)(h \cdot v) = gh \cdot v = hg \cdot v = h \cdot \rho^*(g)(v)$$

因此 $\rho^*(g) \in \mathrm{End}_{k[G]}(V)$。由 Schur 引理，存在 $\lambda \in k$ 使得 $\rho^*(g) = \lambda 1_k$。于是对任意 $v \in V \setminus \{0\}$，$\langle v \rangle$ 是 $k[G]$ 子模。因 V 是单模，$V = \langle v \rangle$，$\dim V = 1$。 □

下面考虑 $k = \mathbb{C}$ 的情况。

引理 3.2

设 G 是有限群。$\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ 是 G 的一次复表示。则有群同构 $\mathrm{GL}(V) \cong S^1$。特别地，若 $g \in G$ 阶数为 n，则 $\rho(g)$ 是 $\mathbb{C}$ 的 n 次本原单位根 ζ_n。

Proof. ρ 是一次复表示，于是有线性同构 $V \cong \mathbb{C}$ 以及群同构 $\mathrm{GL}(V) \cong \mathbb{C}^\times$。对 $g \in G$，设 $\mathrm{o}(g) = n$。则 $\mathrm{id}_\mathbb{C} = \rho(e) = \rho(g^n) = \rho(g)^n$，且 $\rho(g)^m \neq \mathrm{id}_\mathbb{C}$ 对于 $m \leqslant n$ 成立。于是 $\rho(g) = \zeta_n \, \mathrm{id}_\mathbb{C}$，其中 ζ_n 是 n 次本原单位根。 □

定义 3.3. Pontryagin 对偶

设 G 是有限 Abel 群，全体 G 的复表示 $\widehat{G} := \mathrm{Hom}(G, S^1)$ 称为 G 的 **Pontryagin 对偶**。其上可以定义逐点乘法：

$$\forall \rho_1, \rho_2 \in \widehat{G} \; \forall g \in G \; (\rho_1 \cdot \rho_2)(g) := \rho_1(g) \cdot \rho_2(g)$$

于是 $\widehat{G}$ 构成一个群。

我们的目标是证明群同构 $G \cong \widehat{G}$。

引理 3.4

设 G_1, G_2 是有限 Abel 群，那么有自然同构 $\widehat{G_1 \times G_2} \cong \widehat{G}_1 \times \widehat{G}_2$。

Proof. 这是因为 Hom 函子保持直积：$\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(G_1, S^1) \times \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(G_2, S^1) \cong \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(G_1 \times G_2, S^1)$ □

引理 3.5

n 阶循环群满足 $C_n \cong \widehat{C}_n$。

Proof. 设 $C_n = \langle g \rangle$，固定一个 n 次本原单位根 $\zeta_n \in S^1$。对 $m \in \mathbb{Z}$，定义 $\rho_m : G \to S^1$，$g \mapsto \zeta_n^m$。显然 $\rho_m = \rho_k$ 当且仅当 $m \equiv k \pmod n$。这样就给出了一族互不同构的表示 $\left\{\rho_m : C_n \to S^1 \mid m \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right\}$。另一方面，对每个表示 $\rho : C_n \to S^1$，$\rho(g)$ 是一个 n 次本原单位根，所有 n 次本原单位根都能被 ζ_n 生成，于是 $\rho = \rho_m$ 对某个 $m \in \mathbb{Z}$ 成立。于是

$$\widehat{C}_n = \left\{\rho_m : C_n \to S^1 \mid m \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right\} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong C_n$$ □

定理 3.6

设 G 是有限 Abel 群，那么有同构 $G \cong \widehat{G}$。

Proof. 回忆主理想整环上有限生成模的分类定理，每个有限 Abel 群都是一些循环群的直积。于是由引理 3.4 和引理 3.5，有 $G \cong \widehat{G}$。 □

注. 这个同构不是自然的，因为我们需要为一次复表示选择一个对应的本原单位根。然而下面的同构是自然的：

定理 3.7

设 G 是有限 Abel 群，那么有**自然同构** $G \cong \widehat{\widehat{G}}$。

Proof. 与线性代数中的自然同构 $V \cong V''$ 证明相似。 □

对于非 Abel 群在代数闭域上的表示，我们仍然能从命题 3.1 获得一些启发。对于有限群 G，它的**对易子群** $G' := \left\{xyx^{-1}y^{-1} : x, y \in G\right\}$ 是 G 的正规子群，且 G/G' 是 Abel 群。我们知道 G/G' 的既约表示都是一维的，为了从 G/G' 的表示得到 G 的表示，我们需要下面的概念。

定义 3.8. 表示的提升

设 $N \triangleleft G$ 是 G 的正规子群。对于商群 G/N 的表示 $\rho : G/N \to \mathrm{GL}(V)$，它给出了一个 G 上的表示 $\dot{\rho} : G \to \mathrm{GL}(V)$，$\dot{\rho}(g) := \rho(gN)$。$\dot{\rho}$ 称为表示 ρ 在 G 上的提升。

引理 3.9

设 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ 是 G 的一个 k 表示。$\varphi : H \to G$ 是一个群同态，则 $\rho \circ \varphi : H \to \mathrm{GL}(V)$ 是 H 的一个 k 表示。

1. 若 $\rho \circ \varphi$ 是既约表示，则 ρ 也是既约表示；
2. 若 φ 是满同态，则 ρ 既约当且仅当 $\rho \circ \varphi$ 既约。

Proof.

1. 设 ρ 可约。设 $U \leqslant V$ 是非平凡的 G 稳定子空间。对 $h \in H$，
$$(\rho \circ \varphi)(h)(u) = \rho(\varphi(h))(u) \in U$$
故 U 是非平凡的 H 稳定子空间，$\rho \circ \varphi$ 可约。
2. 充分性已证。设 $\rho \circ \varphi$ 可约，$U \leqslant V$ 是非平凡的 H 稳定子空间。对 $g \in G$，存在 $h \in H$ 使得 $g = \varphi(h)$。
$$\rho(g)(u) = \rho(\varphi(h))(u) = (\rho \circ \varphi)(h)(u) \in U$$
故 U 是非平凡的 G 稳定子空间，ρ 可约。 □

推论 3.10

$\rho : G/N \to \mathrm{GL}(V)$ 是既约表示当且仅当它的提升 $\dot{\rho} : G \to \mathrm{GL}(V)$ 是既约表示。

Proof. 注意到 $\pi : G \twoheadrightarrow G/N$ 是满同态，利用引理 3.9 即得。 □

定理 3.11. 一维既约表示的数量

设 k 是代数闭域，G 是有限群。那么 G 有 $[G : G']$ 个互不同构的一维既约表示。

Proof. 注意到 G/G' 是 Abel 群，由命题 3.1，每个单 $k[G/G']$ 模都是一维的。由 Maschke 定理和 Artin-Wedderburn 定理，$k[G/G']$ 有直和分解：
$$k[G/G'] \cong \bigoplus_{i=1}^{r} V_i$$
其中每个 V_i 都是一维的单 $k[G/G']$ 模。每个不可约表示 $\rho_i : G/G' \to \mathrm{GL}(V_i)$ 都能提升到 $\dot{\rho}_i : G \to \mathrm{GL}(V)$，由 $\dot{\rho}_i(g) := \rho_i(gG')$ 给出。显然 $\dot{\rho}_1, \ldots, \dot{\rho}_r$ 是互不同构的 G 的既约表示，于是 G 至少有 $\dim[G/G'] = [G : G']$ 个互不同构的一维不可约表示。

另一方面，设 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ 是一个一维的既约表示。则 $\mathrm{GL}(V) \cong k^\times$ 是个 Abel 群，于是 ρ 诱导了群同态 $\overline{\rho} : G/G' \to \mathrm{GL}(V)$，存在某个 $k[G/G']$ 模同构 $V \cong V_i$。我们就证明了 G 恰好有 $[G:G']$ 个互不同构的一维不可约表示。 □

4 表示的直和，对偶与张量积

在本章中，我们通过向量空间的一些构造，从原有的表示得到新的表示。照例 G 指代有限群，k 指代基域。

下面我们定义表示的直和，对偶和张量积，以给出向量空间上的 G 作用的方式。注意到群作用 $G \times V \to V$ 在 V 上定义了左 $k[G]$ 模结构当且仅当这个群作用是 k 线性的。

定义 4.1. 表示的直和

设 V 和 W 是 $k[G]$ 模。向量空间外直和 $V \oplus W$ 上可以定义 $k[G]$ 模结构如下：对于 $g \in G$，$v \in V$，$w \in W$，

$$g \cdot (v, w) := (g \cdot v, g \cdot w)$$

$V \oplus W$ 上提供的 G 的表示称为 V, W 上提供的表示的直和。

定义 4.2. 表示的对偶

设 V 是 $k[G]$ 模。对偶空间 V' 上可以定义 $k[G]$ 模结构如下：对于 $g \in G$，$v \in V$，$\varphi \in V'$，

$$(g \cdot \varphi)(v) := \varphi\left(g^{-1} \cdot v\right)$$

V' 上提供的 G 的表示称为 V 上提供的表示的**对偶表示**。

定义 4.3. 表示的张量积

设 V 和 W 是 $k[G]$ 模。k 上的张量积空间 $V \otimes_k W$ 上可以定义 $k[G]$ 模结构如下：对于 $g \in G$，$v \in V$，$w \in W$，

$$g \cdot (v \otimes_k w) := (g \cdot v) \otimes_k (g \cdot w)$$

$V \otimes_k W$ 上提供的 G 的表示称为 V, W 上提供的表示的张量积。

注. 注意表示的张量积是左 $k[G]$ 模 $V \otimes_k W$，不是 $V \otimes_{k[G]} W$。因为 V 未必是右 $k[G]$ 模，所以 $V \otimes_{k[G]} W$ 未必是左 $k[G]$ 模。

命题 4.4

设 V 和 W 是 $k[G]$ 模。则 $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ 上有 $k[G]$ 模结构，由如下方式给出：对于 $g \in G$，$v \in V$，$f \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$，

$$(g \cdot f)(v) = g \cdot f\left(g^{-1} \cdot v\right)$$

Proof. 注意到向量空间的自然同构：$\mathrm{Hom}_k(V, W) \cong V' \otimes_k W$。利用对偶表示和张量积表示的定义即可得到结果。 □

接下来我们设 $\mathrm{char}\, k \neq 2$，研究左 $k[G]$ 模 $V \otimes V$ 的直和分解。

定义 4.5. 对称方空间，交错方空间

设 $\mathrm{char}\, k \neq 2$，V 是 k 向量空间。考虑 $V \otimes_k V$ 的如下子空间：

- $\mathrm{S}^2 V := \left\{ \dfrac{1}{2}(v \otimes_k w + w \otimes_k v) :\ v, w \in V \right\}$，称为 V 的对称方空间；
- $\bigwedge^2 V := \left\{ \dfrac{1}{2}(v \otimes_k w - w \otimes_k v) :\ v, w \in V \right\}$，称为 V 的交错方空间。

引理 4.6

设 $\mathrm{char}\, k \neq 2$，V 是 k 向量空间，$\dim V = n$。则 $\dim \mathrm{S}^2 V = \dfrac{1}{2}n(n+1)$，$\dim \bigwedge^2 V = \dfrac{1}{2}n(n-1)$。

Proof. 这是线性代数知识。注意到若 $\{e_1, ..., e_n\}$ 是 V 的一组基，那么 $\left\{ \dfrac{1}{2}(e_i \otimes_k e_j + e_j \otimes_k e_i) :\ 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n \right\}$ 是 $\mathrm{S}^2 V$ 的一组基，$\left\{ \dfrac{1}{2}(e_i \otimes_k e_j - e_j \otimes_k e_i) :\ 1 \leqslant i < j \leqslant n \right\}$ 是 $\bigwedge^2 V$ 的一组基。 □

命题 4.7

设 $\mathrm{char}\, k \neq 2$，V 是 $k[G]$ 模。$V \otimes_k V$ 能分解成 $k[G]$ 子模的直和：$V \otimes V \cong \mathrm{S}^2 V \oplus \bigwedge^2 V$。

Proof. 考虑 2 阶置换群 $S_2 = \{e, \sigma\}$。$k[S_2]$ 上有中心正交幂等元 $e_1 = \dfrac{1+\sigma}{2}$ 和 $e_2 = \dfrac{1-\sigma}{2}$。它们给出了 $k[S_2]$ 到双边理想的分解：

$$k[S_2] = k[S_2]e_1 \oplus k[S_2]e_2 = ke_1 \oplus ke_2$$

对于任意 $k[S_2]$ 模 M，有对应的分解：

$$M = e_1 M \oplus e_2 M = \{m \in M :\ \sigma \cdot m = m\} \oplus \{m \in M :\ \sigma \cdot m = -m\}$$

S_2 在 $V \otimes_k V$ 上有线性作用：对 $v, w \in V$，

$$\sigma \cdot (v \otimes_k w) = w \otimes_k v$$

于是 $V \otimes_k V$ 也是 $k[S_2]$ 模，有

$$V \otimes_k V = e_1(V \otimes_k V) \oplus e_2(V \otimes_k V) = \mathrm{S}^2 V \oplus \wedge^2 V$$

注意到 S_2 和 G 在 $V \otimes_k V$ 上的作用是可交换的，因此 $V \otimes_k V$ 的 $k[S_2]$ 子模 $\mathrm{S}^2 V$ 和 $\bigwedge^2 V$ 同时也是 $k[G]$ 子模。 □

把这个构造推广到 S_n 作用于 $V^{\otimes n}$ 上，即可以把 $V^{\otimes n}$ 分解成 $k[G]$ 子模 $S^\lambda(V)$ 的直和，其中每个 λ 都是 S_n 的一个既约表示。这个构造 $V \mapsto S^\lambda(V)$ 称为 **Schur 函子**。（我们讲义在这个提了一下，我也不知道这是个什么有趣的东西......）

5 特征标理论

5.1 基本性质

我们进入有限群表示论的核心——特征标理论。我们会发现，有限群 G 的表示可以被很少的一点信息所唯一决定，这就是群的特征标。当我们谈及特征标时，表示的基域永远是复数域 $\mathbb{C}$。

定义 5.1. 特征标

设 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ 是群 G 的一个复表示。ρ 的特征标是函数 $\chi_\rho : G \to \mathbb{C}$，

$$\chi_\rho(g) = \mathrm{tr}\, \rho(g)$$

特征标 χ_ρ 的次数就是表示 ρ 的次数。

对于 $\mathbb{C}[G]$ 模 V，我们也用 χ_V 表记 V 上提供的 G 的复表示的特征标。

定义 5.2. 类函数

若函数 $f:G\to\mathbb{C}$ 满足

$$\forall\ g,h\in G\quad f\left(h^{-1}gh\right)=f(g)$$

则称 f 为 G 的一个类函数。换言之，类函数是在每个共轭类上等于常数的函数。全体类函数构成的 $\mathbb{C}$ 代数记为 $\mathscr{C}(G)$。

引理 5.3

设 V 是 $\mathbb{C}[G]$ 模。则特征标 χ_V 是类函数。

Proof. 设 $\rho:G\to\mathrm{GL}(V)$ 是 V 上提供的表示。注意到 $g,h\in G$ 共轭当且仅当 $\rho(g),\rho(h)\in\mathrm{GL}(V)$ 相似。并且注意到线性变换的迹是相似不变量。 □

接下来给出一些特征标的性质。

命题 5.4

设 G 是有限群，$\rho:G\to\mathrm{GL}(V)$ 是一个有限维表示。

1. $\chi_\rho(e_G)=\dim V$；
2. $\chi_\rho(g)=\chi_\rho(e_G)$ 当且仅当 $g\in\ker\rho$；
3. 若 $\dim V=1$，则 χ_ρ 是一个群同态。

Proof.
1. $\chi_\rho(e_G)=\operatorname{tr}\rho(e_G)=\operatorname{tr}\mathrm{id}_V=\dim V$。
2. 充分性显然。证必要性：设 $g\in G$ 满足 $\chi_\rho(g)=\chi_\rho(e_G)$。设 $\lambda_1,...,\lambda_n$ 是计重数的 $\rho(g)$ 的全部本征值。因为 $|G|<\infty$，由 Lagrange 定理 g 的阶数 $\mathrm{o}(g)<\infty$。而 $\rho(g)^{\mathrm{o}(g)}=\mathrm{id}_V$ 表明

$$\lambda_1^{\mathrm{o}(g)}=\cdots=\lambda_n^{\mathrm{o}(g)}=1$$

故 $\lambda_1,...,\lambda_n$ 都是单位根。此外，

$$|\chi_\rho(g)|=|\operatorname{tr}\rho(g)|=\left|\sum_{i=1}^n\lambda_i\right|\leqslant\sum_{i=1}^n|\lambda_i|=n=|\chi_\rho(e_G)|=|\chi_\rho(g)|$$

因此中间的不等号取为等号，有 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=1$。$\rho(g)$ 只有唯一的本征值 1，因此 $\rho(g)=\mathrm{id}_V$。
3. 对 $\dim V=1$，$\operatorname{tr}\rho(g)=\rho(g)$，因此 $\chi_\rho=\rho$，是群同态。 □

对群代数 $\mathbb{C}[G]$ 用 Artin-Wedderburn 定理做直和分解，可得如下推论

推论 5.5

设 G 是有限群。$\chi_1,...,\chi_r$ 是 G 的全部互异既约表示给出的特征标。那么有

$$|G|=\sum_{i=1}^r\chi_i(e_G)^2$$

Proof. 由定理 2.18，

$$|G|=\sum_{i=1}^r(\dim V_i)^2$$

其中 $V_1,...,V_r$ 是全部互异的单 $\mathbb{C}[G]$ 模。由命题 5.4.1，$\dim V_i=\chi_i(e_G)$。 □

由于 $\mathbb{C}$ 是代数闭域，$\mathbb{C}$ 上向量空间 V 的线性变换恰好有 $\dim V$ 个本征值（计重数）。而线性变换的迹等于这些本征值的和。利用这个结论，我们能得到特征标的如下信息：

命题 5.6

设 G 是有限群，V, W 是有限维 $\mathbb{C}[G]$ 模。有如下结论：

1. 对 $g \in G$，有 $\chi_V\left(g^{-1}\right) = \overline{\chi_V(g)}$；
2. $\chi_{V'} = \overline{\chi_V}$；
3. $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$；
4. $\chi_{V \otimes_{\mathbb{C}} W} = \chi_V \chi_W$；
5. $\chi_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W)} = \overline{\chi_V}\chi_W$；
6. 对 $g \in G$，有 $\chi_{\mathrm{S}^2 V} = \dfrac{1}{2}\left(\chi_V(g)^2 + \chi_V\left(g^2\right)\right)$；
7. 对 $g \in G$，有 $\chi_{\bigwedge^2 V} = \dfrac{1}{2}\left(\chi_V(g)^2 - \chi_V\left(g^2\right)\right)$。

Proof. 首先固定 $g \in G$。由于涉及的空间较多，我们用 g_V 表达 g 通过表示 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ 在 V 上的作用。由于 $|G| < \infty$，由 Lagrange 定理 $\mathrm{o}(g) = n < \infty$。则 $g_V^n = \mathrm{id}_V$。$p(x) = x^n - 1 \in \mathbb{C}[x]$ 是 $\rho(g)$ 的零化多项式。注意到 p 的形式导数 $p'(x) = nx^{n-1}$ 与 p 在 $\mathbb{C}[x]$ 中互素，于是 p 无重根。而 g_V 的极小多项式 m 整除 p，因此也无重根。线性代数知识告诉我们 g_V 是可对角化的。

我们可以固定一组由 g_V 的本征向量 $\{v_1, ..., v_n\}$ 构成的 V 的基。设 $\lambda_1, ..., \lambda_n$ 是对应的本征值。则特征标 $\chi_V(g) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$。

1. $\rho\left(g^{-1}\right) = g_V^{-1}$ 的本征值是 $\lambda_1^{-1}, ..., \lambda_n^{-1}$。在命题 5.4 的证明中我们说明了 $\lambda_1^{-1}, ..., \lambda_n^{-1}$ 都是单位根，因此 $\lambda_i^{-1} = \overline{\lambda_i}$。于是
$$\chi_V\left(g^{-1}\right) = \operatorname{tr} g_V^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda_i} = \overline{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} = \overline{\chi_V(g)}$$
2. 设 $\{f_1, ..., f_n\}$ 是 $\{v_1, ..., v_n\}$ 的对偶基。g 在其上的作用为
$$(g \cdot f_i)(v_j) = f_i(\rho(g)^{-1}(v_j)) = f_i(\lambda_j^{-1} v_j) = \lambda_i^{-1}\delta_{ij} = \lambda_i f_i(v_j) \implies g \cdot f_i = \lambda_i f_i$$
于是 $g_{V'} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V')$ 有本征值 $\lambda_1^{-1}, ..., \lambda_n^{-1}$。剩下的步骤与 1 相同。
3. 设 $\{w_1, ..., w_m\}$ 是一组由 g_W 的本征向量构成的 W 的基，$\eta_1, ..., \eta_m$ 是对应的本征值。于是 $\{v_1, ..., v_n, w_1, ..., w_m\}$ 是 $V \oplus W$ 的一组基，且 $g_{V\oplus W}(v_i) = \lambda_i v_i$ 以及 $g_{V \oplus W}(w_i) = \eta_i$。有
$$\chi_{V \oplus W}(g) = \operatorname{tr} g_{V \oplus W} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i + \sum_{i=1}^{m} \eta_i = \chi_V(g) + \chi_W(g)$$
4. 设 $\{w_1, ..., w_m\}$ 是一组由 g_W 的本征向量构成的 W 的基，$\eta_1, ..., \eta_m$ 是对应的本征值。于是 $\{v_i \otimes_{\mathbb{C}} w_j : 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m\}$ 是 $V \otimes_{\mathbb{C}} W$ 的一组基，且 $g_{V \otimes_{\mathbb{C}} W}(v_i \otimes_{\mathbb{C}} w_j) = \lambda_i \eta_j v_i \otimes_{\mathbb{C}} w_j$。于是
$$\chi_{V \otimes_{\mathbb{C}} W}(g) = \operatorname{tr} g_{V \otimes_{\mathbb{C}} W} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \eta_j = \chi_V(g)\chi_W(g)$$
5. 利用自然同构 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W) \cong V' \otimes_{\mathbb{C}} W$ 和 2,4 的结论。

6 & 7. 利用引理 4.6 的证明中给出的 $\mathrm{S}^2 V$ 和 $\bigwedge^2 V$ 的基，我们有
$$\chi_{\mathrm{S}^2 V}(g) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \lambda_i \lambda_j = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2\right) = \frac{1}{2}\left(\chi_V(g)^2 + \chi_V\left(g^2\right)\right)$$
$$\chi_{\bigwedge^2 V}(g) = \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_i \lambda_j = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2\right) = \frac{1}{2}\left(\chi_V(g)^2 - \chi_V\left(g^2\right)\right)$$
□

5.2 行正交关系

本节的核心之一是证明有限群 G 的两个表示同构当且仅当它们的特征标相等，这是行正交关系的一个推论。首先我们注意到类函数的集合 $\mathscr{C}(G)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的向量空间，我们能在其上定义一个内积 $\langle -,-\rangle : \mathscr{C}(G)\times\mathscr{C}(G)\to\mathbb{C}$

$$\forall\,\varphi,\psi\in\mathscr{C}(G)\quad \langle\varphi,\psi\rangle := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\varphi(g)}\psi(g)$$

容易验证这符合复内积空间上内积的定义。

定义 5.7. 不变子模

设 V 是 $\mathbb{C}[G]$ 模，V 的不变子模定义为

$$V^G := \{v\in V:\ \forall\, g\in G\ g\cdot v = v\}$$

换言之，对于所有 G 作用平凡的 V 的子模，V^G 是其中的最大者。[a]

[a] 这句话的英文是：V^G is the largest submodule of V on which G acts trivially. 我语文水平有限不知如何通顺翻译……

引理 5.8. 不动点公式

设 G 是有限群，V 是有限维 $\mathbb{C}[G]$ 模。那么有

$$\dim V^G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g) = \langle\chi_{\mathbf{1}},\chi_V\rangle$$

其中 $\chi_{\mathbf{1}}$ 是 G 的既约平凡表示 $\mathbf{1}_G$ 提供的特征标。

Proof. 考虑 $\mathbb{C}[G]$ 的**主幂等元**：

$$e := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\in\mathbb{C}[G]$$

容易验证 $ge = eg = e$ 对任意 $g\in G$ 成立，以及 $e^2 = e$。V 有直和分解 $V = e\cdot V\oplus(1-e)\cdot V$。我们要证 $e\cdot V = V^G$：对 $g\in G$，有 $g\cdot(e\cdot v) = ge\cdot v = e\cdot v$。于是 $e\cdot V\leqslant V^G$。另一方面，对 $v\in V^G$，有 $|G|e\cdot v = \sum_{g\in G} g\cdot v = |G|v$，于是 $v = e\cdot v\in e\cdot V$。故 $V^G\leqslant e\cdot V$。

设 $\rho: G\to\mathrm{GL}(V)$ 是 V 上提供的表示，$e_V\in\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ 是 e 在 V 上的作用。e_V 有唯一的本征值 1，代数重数等于 $\operatorname{im} e_V$ 的维数。于是有

$$\dim V^G = \dim(e\cdot V) = \dim\operatorname{im} e_V = \operatorname{tr} e_V = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\operatorname{tr}\rho(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g)$$

□

引理 5.9

设 V,W 是有限维 $\mathbb{C}[G]$ 模。则

1. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V,W) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W)^G$；
2. $\langle\chi_V,\chi_W\rangle = \dim\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V,W)$。

Proof. 1. 对 $f\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W)$：

$$\begin{aligned} f\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W)^G &\iff \forall\, g\in G\ \forall\, v\in V\quad (g\cdot f)(g^{-1}\cdot v) = f(v)\\ &\iff \forall\, g\in G\quad g_W\circ f = f\circ g_V\\ &\iff f\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V,W)\end{aligned}$$

2. 利用不动点公式和命题 5.6.5，有

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V,W) = \dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W)^G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W)}(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi_V(g)}\chi_W(g) = \langle \chi_V, \chi_W\rangle \qquad \square$$

定理 5.10. 行正交关系

设 G 是有限群，V,W 是单 $\mathbb{C}[G]$ 模。则它们提供的特征标满足

$$\langle \chi_V, \chi_W\rangle = \begin{cases} 1 & \chi_V = \chi_W \\ 0 & \chi_V \neq \chi_W \end{cases}$$

Proof. 由于 V,W 是单模，由 Schur 引理与引理 2.1，我们知道

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V,W) = \begin{cases} 1 & V \cong W \\ 0 & V \ncong W \end{cases}$$

若 $\chi_V \neq \chi_W$，则 $V \ncong W$。于是引用前一个引理我们得到

$$\langle \chi_V, \chi_W\rangle = \dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V,W) = 0$$

若 $\chi_V = \chi_W$，则

$$\langle \chi_V, \chi_W\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\chi_V(g)|^2 \geqslant \frac{(\dim V)^2}{|G|} > 0$$

而 $\langle \chi_V, \chi_W\rangle \in \{0,1\}$，于是只能有 $\langle \chi_V, \chi_W\rangle = 1$。 $\square$

推论 5.11

G 的既约特征标构成了 $\mathscr{C}(G)$ 的一组标准正交基。

Proof. 设 $\chi_1, ..., \chi_r$ 是 G 的全部互异特征标。行正交关系告诉我们这些特征标构成 $\mathscr{C}(G)$ 的一个标准正交组。另一方面，假设 $C_1, ..., C_s$ 是 G 的共轭类，则容易验证 $\{\mathbf{1}_{C_1}, ..., \mathbf{1}_{C_s}\}$ 构成 $\mathscr{C}(G)$ 的一组基。于是 $\dim \mathscr{C}(G) = s$。由推论 2.12 知 $r = s$。于是 $\{\chi_1, ..., \chi_r\}$ 是标准正交基。 $\square$

行正交关系导出了一个很强的结论：G 的表示能被既约特征标的信息所唯一决定。

推论 5.12

设 V,W 是有限维 $\mathbb{C}[G]$ 模。则模同构 $V \cong W$ 当且仅当 $\chi_V = \chi_W$。

Proof. 必要性显然。证充分性：设 $V_1, ..., V_r$ 是全部互不同构的单 $\mathbb{C}[G]$ 模，$\chi_1, ..., \chi_r$ 是对应的特征标。考虑 V 的 Artin-Wedderburn 分解：

$$V \cong \bigoplus_{i=1}^r V_i^{a_i}$$

利用命题 5.6.3，特征标有对应关系

$$\chi_V = \sum_{i=1}^r a_i \chi_i$$

我们用行正交关系能得到 $a_i = \langle \chi_V, \chi_i\rangle$。对于 W 的 Artin-Wedderburn 分解：

$$W \cong \bigoplus_{i=1}^r V_i^{b_i}$$

我们立刻从 $\chi_V = \chi_W$ 得到 $a_i = b_i$，故 $V \cong W$。 $\square$

5.3 列正交关系

根据上节的讨论，有限群 G 的表示的所有信息都由 G 的既约特征标在共轭类上的取值所给出。这些信息可以写成一张表格的形式：

定义 5.13. 特征标表

设 G 是有限群，共轭类为 $C_1,...,C_s$。我们在每个共轭类中取一个代表元素 $g_i\in C_i$。设 $\chi_1,...,\chi_r$ 是 G 的全部互异既约特征标。从推论 2.12 知 $r=s$，故我们能写出一个方阵 $\boldsymbol{W}=\{\chi_i(g_j)\}_{i,j=1}^r$，称为 G 的特征标表。

这样，行正交关系告诉我们，$\boldsymbol{W}$ 的行向量是相互正交的，这也是定理名称的来源。除了行正交关系，我们还有列正交关系。为了表述列正交关系，我们固定一些记号：

定义 5.14. 共轭类，中心化子

设 G 是有限群，$g\in G$。

1. g 的共轭类记为 $g^G:=\{h^{-1}gh:\ h\in G\}$；
2. g 的中心化子记为 $C_G(g):=\{h\in G:\ gh=hg\}$。

考虑 G 对自身的共轭作用，由轨道-稳定子定理我们知道 $|G|=\left|g^G\right|\cdot|C_G(g)|$。

定理 5.15. 列正交关系

设 G 是有限群，$\chi_1,...,\chi_r$ 是 G 的全部互异既约特征标。对 $g,h\in G$，有

$$\sum_{i=1}^r\overline{\chi_i(g)}\chi_i(h)=\begin{cases}|C_G(g)| & g\text{与}h\text{共轭}\\ 0 & \text{其它情况}\end{cases}$$

Proof. 采用定义 5.13 的记号。注意到特征标表 $\boldsymbol{W}$ 不是幺正矩阵，因为在行正交关系中我们有一个 $|G|^{-1}$ 的因子。为此我们定义

$$x_{ij}:=\sqrt{\frac{|C_j|}{|G|}}\chi_i(g_j),\qquad \boldsymbol{X}:=\{x_{ij}\}_{i,j=1}^r$$

我们可以验证 $\boldsymbol{X}$ 是幺正矩阵：

$$\sum_{k=1}^r\overline{x_{ik}}x_{jk}=\sum_{k=1}^r\frac{|C_k|}{|G|}\overline{\chi_i(g_k)}\chi_j(g_k)=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\overline{\chi_i(x)}\chi_j(x)=\langle\chi_i,\chi_j\rangle=\delta_{ij}$$

最后一个等式是行正交关系。于是 $\overline{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}^\intercal=\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{X}$ 是幺正矩阵。从 $\overline{\boldsymbol{X}}^\intercal\boldsymbol{X}=\boldsymbol{I}$ 可得：

$$\delta_{ij}=\sum_{k=1}^r\overline{x_{ki}}x_{kj}=\sum_{k=1}^r\frac{\sqrt{|C_i|\cdot|C_j|}}{|G|}\overline{\chi_k(g_i)}\chi_k(g_j)$$

于是

$$\sum_{k=1}^r\overline{\chi_k(g_i)}\chi_k(g_j)=\frac{|G|}{\sqrt{|C_i|\cdot|C_j|}}\delta_{ij}=\frac{|G|}{|C_i|}\delta_{ij}=|C_G(g_i)|\,\delta_{ij}$$

□

特征标 $\chi:G\to\mathbb{C}$ 可以直接线性地扩充到群代数 $\mathbb{C}[G]$ 上，我们仍记作 $\chi:\mathbb{C}[G]\to\mathbb{C}$。给定群代数 $\mathbb{C}[G]$ 的一个元素 $x=\sum_{g\in G}a_g g$，列正交关系的一个应用是利用 G 的既约特征标给出系数 a_g 的表达。

命题 5.16. 反演公式

设 G 是有限群，$\chi_1, ..., \chi_r$ 是 G 的全部互异既约特征标。对于 $x = \sum_{g \in G} a_g g \in \mathbb{C}[G]$，有

$$a_g = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{r} \chi_i(xg^{-1}) \chi_i(e_G)$$

Proof. 我们直接计算：

$$\sum_{i=1}^{r} \chi_i(xg^{-1}) \chi_i(e_G) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{h \in G} a_h \chi_i(hg^{-1}) \chi_i(e_G) = \sum_{h \in G} a_h \left(\sum_{i=1}^{r} \chi_i(hg^{-1}) \overline{\chi_i(e_G)} \right)$$

注意到 e_G 的共轭类就是 $\{e_G\}$，利用列正交关系，有

$$\sum_{h \in G} a_h \left(\sum_{i=1}^{r} \chi_i(hg^{-1}) \overline{\chi_i(e_G)} \right) = a_g \sum_{i=1}^{r} \chi_i(e_G) \overline{\chi_i(e_G)} = a_g |G|$$

□

回忆第三章中，命题 3.1 证明了每个有限 Abel 群的既约复表示都是一维的。对于一维复表示，表示 $\rho : G \to \mathbb{C}$ 就是特征标 $\chi : G \to \mathbb{C}$。而定理 3.6 表明 G 同构于它全体既约特征标构成的群 $\widehat{G}$。下面我们用 $g \mapsto \chi_g$ 指代这个同构。

推论 5.17. Abel 群的反演公式

设 G 是有限 Abel 群，对于 $x = \sum_{g \in G} a_g g \in \mathbb{C}[G]$，有

$$a_g = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G}^{r} \overline{\chi_h(g)} \chi_h(x)$$

Proof. G 的特征标都是群同态，扩展到 $\mathbb{C}[G]$ 上则是 $\mathbb{C}$ 代数同态。因此由命题 5.6，$\chi_h(xg^{-1}) = \chi_h(x)\chi_h(g^{-1}) = \chi_h(x)\overline{\chi_h(g)}$。另外对一维表示 $\chi_h(e_G) = 1$。代入反演公式即得到果。 □

有限 Abel 群上的类函数空间 $\mathscr{C}(G)$ 就是全体 $G \to \mathbb{C}$ 的函数。反演公式使我们能够仿照泛函分析，定义一个离散的 Fourier 变换：

定义 5.18. 有限 Abel 群上的 Fourier 变换

设 G 是有限 Abel 群。对函数 $f : G \to \mathbb{C}$，我们定义它的 Fourier 变换：

$$\mathscr{F}[f](g) = \widehat{f}(g) := \sqrt{|G|} \langle f, \chi_g \rangle = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{x \in G} \overline{f(x)} \chi_g(x)$$

对于有限 Abel 群，列正交关系可以写成：

$$\forall x, y \in G \quad \sum_{g \in G} \overline{\chi_g(x)} \chi_g(y) = |G| \delta_{xy}$$

容易看出 $\mathscr{F}$ 有逆变换：

$$\mathscr{F}^{-1}[\widehat{f}](x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{g \in G} \widehat{f}(g) \chi_g(x)$$

和通常的 Fourier 变换一样，我们给出的变换 $\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{C}(G)$ 上的一个幺正变换，也即满足下面的等式：

命题 5.19. Parseval-Plancherel 等式

设 G 有限 Abel 群。函数 $f_1, f_2 \in \mathscr{C}(G)$ 和它们的 Fourier 变换 $\widehat{f}_1, \widehat{f}_2 \in \mathscr{C}(G)$ 满足

$$\sum_{g\in G} \overline{\widehat{f}_1(g)} \widehat{f}_2(g) = \sum_{x\in G} \overline{f_1(x)} f_2(x)$$

Proof. 利用列正交关系直接计算：

$$\begin{aligned}
\sum_{g\in G} \overline{\widehat{f}_1(g)} \widehat{f}_2(g) &= \sum_{g\in G} \left(\frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{x\in G} \overline{f_1(x)} \chi_g(x) \right) \left(\frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{y\in G} f_2(y) \overline{\chi_g(y)} \right) \\
&= \sum_{x\in G} \sum_{y\in G} \overline{f_1(x)} f_2(y) \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \chi_g(x) \overline{\chi_g(y)} \right) \\
&= \sum_{x\in G} \sum_{y\in G} \overline{f_1(x)} f_2(y) \delta_{xy} = \sum_{x\in G} \overline{f_1(x)} f_2(x)
\end{aligned}$$

□

5.4 特征标表

行正交关系与列正交关系联合使用，可以快速得到一些低阶群的完整特征标表。我们不打算给出具体算法，仅列出两个常见低阶群的特征标表：

例 5.20. 置换群 S_4 的特征标表

S_4 有 5 个共轭类，因此有 5 个互异的既约特征标。其中 3 个可以从已知的 $S_3 \cong S_4/V_4$ 的 3 个表示 $\mathbf{1}, \epsilon, W$ 提升得到；最后两个可以从列正交关系得到。

$\mathbf{1}$ 是 S_3 的平凡表示；ϵ 是一维的符号表示，即奇置换映射到 $-1 \in \mathbb{C}$ 而偶置换映射到 $1 \in \mathbb{C}$；W 是 S_3 在 $\mathbb{C}^3$ 上的置换表示的一个二维 $\mathbb{C}[S_3]$ 子模：$W = \{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 : a_1 + a_2 + a_3 = 0\}$。

完整特征标表如下：

S_4	e	(12)	(12)(34)	(123)	(1234)
$\left\|g^G\right\|$	1	3	8	6	6
$\|C_G(g)\|$	24	8	3	4	4
$\tilde{\mathbf{1}}$	1	1	1	1	1
$\tilde{\epsilon}$	1	-1	1	1	-1
$\tilde{\chi_W}$	2	0	2	-1	0
χ_4	3	1	-1	0	-1
χ_V	3	-1	-1	0	1

例 5.21. 四元数群 Q_8 的特征标表

Q_8 有 5 个共轭类，其中 4 个可以从 $V_4 \cong Q_8/C_2$ 的表示提升得到，最后一个用列正交关系计算得到。完整特征标表如下：

Q_8	1	-1	i	j	k
$\tilde{\mathbf{1}}$	1	1	1	1	1
$\tilde{\chi}_2$	1	1	1	-1	-1
$\tilde{\chi}_3$	1	1	-1	1	-1
$\tilde{\chi}_4$	1	1	-1	-1	1
χ_5	2	-2	0	0	0

注. 注意到二面体群 D_8 也满足 $V_4 \cong D_8/C_2$，这迫使 D_8 和 Q_8 享有完全相同的特征标表，然而众所周知 $D_8 \not\cong Q_8$。因此特征标表不能完全决定有限群的同构类。

6 诱导表示与限制表示

6.1 诱导模

我们已经看到如果从商群 G/N 的表示提升到 G 的表示。本章考虑如何从子群 $H \leqslant G$ 的表示得到 G 的表示，也即诱导表示：

定义 6.1. 诱导模，诱导表示

设 H 是 G 的子群，W 是左 $k[H]$ 模。注意到群代数 $k[G]$ 是 $(k[G], k[H])$ 双模。于是张量积

$$\operatorname{Ind}_H^G W := k[G] \otimes_{k[H]} W$$

是左 $k[G]$ 模，称为 W 诱导的 $k[G]$ 模。设 $\rho: H \to \mathrm{GL}(W)$ 是 W 上提供的 H 的表示，则 $\operatorname{Ind}_H^G W$ 上提供的 G 的表示称为诱导表示，并记作 $\operatorname{Ind}_H^G \rho$。

注. 对于不熟悉非交换环上张量积的读者，$\operatorname{Ind}_H^G W$ 作为 k 上的向量空间可以定义为商空间 $(k[G] \otimes_k W)/I$，其中 $I := \langle \{h \cdot v - v :\ h \in H,\ v \in k[G] \otimes_k W\} \rangle$。然后验证 $\operatorname{Ind}_H^G W$ 上有继承自 $k[G] \otimes_k W$ 的左 $k[G]$ 模结构。

关于 $\operatorname{Ind}_H^G W$ 作为 k 上向量空间的性质，有如下结论：

命题 6.2

设 $H \leqslant G$，G 有左陪集分解：$G = \bigcup_{i=1}^{m} x_i H$，则 $\operatorname{Ind}_H^G W$ 有作为左 $k[G]$ 模的直和分解：

$$\operatorname{Ind}_H^G W \cong \bigoplus_{i=1}^{m} \left(x_i k[H] \otimes_{k[H]} W \right)$$

特别地，有 $\dim \operatorname{Ind}_H^G W = [G:H] \dim W$。

Proof. G 的左陪集分解使得每个 $g \in G$ 都能唯一表示成 $x_i h$，其中 $i \in \{1, ..., m\}$，$h \in H$。于是每个 $k[G]$ 的元素都有唯一的表示：

$$\sum_{g \in G} a_g g = \sum_{i=1}^{m} \sum_{h \in H} a_{x_i h} x_i h = \sum_{i=1}^{m} x_i \left(\sum_{h \in H} a_{x_i h} h \right)$$

于是 $k[G]$ 有直和分解：

$$k[G] = \bigoplus_{i=1}^{m} x_i k[H]$$

其中每个 $x_i k[H]$ 都是 $(k[G], k[H])$ 双模。于是相应地诱导模有左 $k[G]$ 模同构

$$\operatorname{Ind}_H^G W = k[G] \otimes_{k[H]} W \cong \bigoplus_{i=1}^{m} \left(x_i k[H] \otimes_{k[H]} W \right)$$

更进一步，容易看出如下左 $k[H]$ 模同构：

$$x_i k[H] \otimes_{k[H]} W \cong k[H] \otimes_{k[H]} W \cong W$$

每个左 $k[G]$ 模同构和左 $k[H]$ 模同构同时也是 k 线性同构。综合起来我们得到线性同构：

$$\operatorname{Ind}_H^G W \cong \bigoplus_{i=1}^{m} W$$

于是维数满足

$$\dim \operatorname{Ind}_H^G W = m \dim W = [G:H] \dim W$$

□

命题 6.3. 诱导表示的传递性

设 $H \leqslant L \leqslant G$。对 $k[H]$ 模 W，有 $k[G]$ 模同构：

$$\operatorname{Ind}_L^G \operatorname{Ind}_H^L W \cong \operatorname{Ind}_H^G W$$

Proof. 由张量积的性质，易见如下 $k[G]$ 模同构：

$$\operatorname{Ind}_L^G \operatorname{Ind}_H^L W = k[G] \otimes_{k[L]} \big(k[L] \otimes_{k[H]} W\big) \cong \big(k[G] \otimes_{k[L]} k[L]\big) \otimes_{kH} W \cong k[G] \otimes_{k[H]} W = \operatorname{Ind}_H^G W$$ □

定义 6.4. 限制表示

设 H 是 G 的子群，U 是 $k[G]$ 模。则 U 上有自然的 $k[H]$ 模结构，记作 $\operatorname{Res}_H^G U$。而 $\operatorname{Res}_H^G U$ 上 H 的表示称为限制表示。

下面的定理揭示了诱导表示与限制表示的对称关系：

定理 6.5. 诱导是限制的左伴随

设 $H \leqslant G$。诱导函子 $\operatorname{Ind}_H^G : k[H]\text{-Mod} \to k[G]\text{-Mod}$ 是限制函子 $\operatorname{Res}_H^G : k[G]\text{-Mod} \to k[H]\text{-Mod}$ 的左伴随。具体说，对任意左 $k[H]$ 模 W 和左 $k[G]$ 模 U，有 k 线性同构：

$$\operatorname{Hom}_{k[G]}\Big(\operatorname{Ind}_H^G W,\ U\Big) \cong \operatorname{Hom}_{k[H]}\big(W,\ \operatorname{Res}_H^G U\big)$$

Proof. 定义 $\Phi : \operatorname{Hom}_{k[G]}\Big(\operatorname{Ind}_H^G W,\ U\Big) \to \operatorname{Hom}_{k[H]}\big(W,\ \operatorname{Res}_H^G U\big)$：对 $w \in W$ 和 $\alpha \in \operatorname{Hom}_{k[G]}\Big(\operatorname{Ind}_H^G W,\ U\Big)$，

$$\Phi(\alpha)(w) := \alpha(e_G \otimes_{k[H]} w)$$

经如下复合映射可知 $\Phi(\alpha)$ 是左 $k[H]$ 模同态：

$$\begin{aligned} W &\longrightarrow \operatorname{Res}_H^G \operatorname{Ind}_H^G W \longrightarrow \operatorname{Res}_H^G U \\ w &\longmapsto e_G \otimes_{k[H]} w \longmapsto \alpha\left(e_G \otimes_{k[H]} w\right) \end{aligned}$$

故 Φ 是良定的。

定义 $\Psi : \operatorname{Hom}_{k[H]}\big(W,\ \operatorname{Res}_H^G U\big) \to \operatorname{Hom}_{k[G]}\Big(\operatorname{Ind}_H^G W,\ U\Big)$：对 $\beta \in \operatorname{Hom}_{k[H]}\big(W,\ \operatorname{Res}_H^G U\big)$ 和初等张量 $g \otimes_{k[H]} w \in \operatorname{Ind}_H^G W$，

$$\Psi(\beta)(g \otimes_{k[H]} w) := g \cdot \beta(w)$$

易见 $\Psi(\beta)$ 是良定的左 $k[G]$ 模同态，故 Ψ 是良定的。

最后我们验证 Φ 与 Ψ 互逆，从而完成证明。

$$\begin{aligned} \Psi \circ \Phi(\alpha)(g \otimes_{k[H]} w) = g \cdot \Phi(\alpha)(w) = g \cdot \alpha(e_G \otimes_{k[H]} w) = \alpha(g \otimes_{k[H]} w) &\implies \Psi \circ \Phi(\alpha) = \alpha \\ \Phi \circ \Psi(\beta)(w) = \Psi(\beta)(e_G \otimes_{k[H]} w) = e_G \cdot \beta(w) = \beta(w) &\implies \Phi \circ \Psi(\beta) = \beta \end{aligned}$$ □

注. 这个定理也能从张量积的性质直接得到。我们熟知张量积函子 $k[G] \otimes_{k[H]} -$ 是 Hom 函子 $\operatorname{Hom}_{k[H]}(W, -)$ 的左伴随。故：

$$\operatorname{Hom}_{k[G]}\Big(\operatorname{Ind}_H^G W,\ U\Big) = \operatorname{Hom}_{k[G]}\big(k[G] \otimes_{k[H]} W,\ U\big) \cong \operatorname{Hom}_{k[H]}\big(W, \operatorname{Hom}_{k[G]}(k[G], U)\big) \cong \operatorname{Hom}_{k[H]}\big(W, \operatorname{Res}_H^G U\big)$$

6.2 诱导特征标

接下来把目光转回特征标，研究特征标的诱导与限制。照例我们只考虑 $k = \mathbb{C}$。

定义 6.6. 诱导特征标，限制特征标

设 $H \leqslant G$。

- 设 ψ 是 $\mathbb{C}[G]$ 模 V 提供的特征标，限制特征标 $\operatorname{Res}_H^G \psi$ 是 $\mathbb{C}[H]$ 模 $\operatorname{Res}_H^G V$ 提供的特征标；
- 设 φ 是 $\mathbb{C}[H]$ 模 W 提供的特征标，诱导特征标 $\operatorname{Ind}_H^G \psi$ 是 $\mathbb{C}[G]$ 模 $\operatorname{Ind}_H^G V$ 提供的特征标。

以示区分，我们把类函数空间 $\mathscr{C}(G)$ 上的内积记作 $\langle -, -\rangle_G$ 而把 $\mathscr{C}(H)$ 上的内积记作 $\langle -, -\rangle_H$。

定理 6.5 的内积空间版本如下：

推论 6.7. Frobenius 互反律

设 $H \leqslant G$，φ 是 H 的一个特征标，ψ 是 G 的一个特征标。那么有

$$\left\langle \operatorname{Ind}_H^G \varphi,\ \psi \right\rangle_G = \left\langle \varphi,\ \operatorname{Res}_H^G \psi \right\rangle_H$$

换言之，$\operatorname{Ind}_H^G : \mathscr{C}(H) \to \mathscr{C}(G)$ 和 $\operatorname{Res}_H^G : \mathscr{C}(G) \to \mathscr{C}(H)$ 是互为伴随的线性映射。

Proof. 设 φ 是 $\mathbb{C}[H]$ 模 W 提供的特征标，ψ 是 $\mathbb{C}[G]$ 模 U 提供的特征标。结合定理 6.5 以及引理 5.9，

$$\left\langle \operatorname{Ind}_H^G \varphi,\ \psi \right\rangle_G = \dim \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(\operatorname{Ind}_H^G W,\ U) = \dim \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}[H]}(W,\ \operatorname{Res}_H^G U) = \left\langle \varphi,\ \operatorname{Res}_H^G \psi \right\rangle_H$$ □

接下来我们计算诱导模 $\operatorname{Ind}_H^G W$ 的特征标。

定义 6.8. 零扩展

设 $H \leqslant G$，R 是任意环。对于映射 $\varphi : H \to R$，定义它在 G 上的零扩展为映射 $\varphi^\circ : G \to R$，

$$\varphi^\circ(g) = \begin{cases} \varphi(g) & g \in H \\ 0 & g \in G \setminus H \end{cases}$$

引理 6.9

设 $H \leqslant G$，W 是有限维 $k[H]$ 模。固定 G 的左陪集分解 $G = \bigcup_{i=1}^{m} x_i H$，以及 W 的一组基 $\{w_1, ..., w_n\}$。那么 $\operatorname{Ind}_H^G W$ 有基

$$\left\{ x_i \otimes_{k[H]} w_j :\ i \in \{1, ..., m\},\ j \in \{1, ..., n\} \right\}$$

设 $\rho : H \to \mathrm{GL}(W)$ 是 W 提供的表示，则其诱导表示在这组基上能表示成分块矩阵

$$\operatorname{Ind}_H^G \rho(g) = \begin{pmatrix} \rho^\circ(x_1^{-1} g x_1) & \cdots & \rho^\circ(x_1^{-1} g x_m) \\ \vdots & & \vdots \\ \rho^\circ(x_m^{-1} g x_1) & \cdots & \rho^\circ(x_m^{-1} g x_m) \end{pmatrix}$$

Proof. 命题 6.2 表明 $\left\{ x_i \otimes_{k[H]} w_j \right\}$ 是 $\operatorname{Ind}_H^G W$ 的一组基。

固定 $g \in G$，注意到 g 作用在商集 G/H 是一个置换。对 $i \in \{1, ..., m\}$，存在 $g \cdot i \in \{1, ..., m\}$ 和 $h \in H$ 使得 $g x_i = x_{g\cdot i} h$。有

$$\begin{aligned} \operatorname{Ind}_H^G \rho(g) \left(x_i \otimes_{k[H]} w_j \right) &= g \cdot \left(x_i \otimes_{k[H]} w_j \right) = x_{g\cdot i} h \otimes_{k[H]} w_j = x_{g\cdot i} \otimes_{k[H]} h \cdot w_j \\ &= x_{g\cdot i} \otimes_{k[H]} \rho(h)(w_j) = x_{g\cdot i} \otimes_{k[H]} \rho\left(x_{g\cdot i}^{-1} g x_i \right)(w_j) \end{aligned}$$

设在基 $\{w_1, ..., w_n\}$ 上有 $\rho(h) = \{a_{ij}(h)\}_{i,j=1}^{n}$。于是

$$x_{g\cdot i} \otimes_{k[H]} \rho\left(x_{g\cdot i}^{-1} g x_i \right)(w_j) = \sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell j}\left(x_{g\cdot i}^{-1} g x_i \right) x_{g\cdot i} \otimes_{k[H]} w_\ell$$

注意到 $x_s^{-1} g x_i \in H$ 当且仅当 $s = g \cdot i$，于是

$$\sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell j}\left(x_{g\cdot i}^{-1} g x_i \right) x_{g\cdot i} \otimes_{k[H]} w_\ell = \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{s=1}^{m} a_{\ell j}^\circ\left(x_s^{-1} g x_i \right) x_s \otimes_{k[H]} w_\ell = \sum_{s=1}^{m} \rho^\circ\left(x_s^{-1} g x_i \right) x_s \otimes_{k[H]} w_j$$

于是 $\operatorname{Ind}_H^G \rho(g)$ 有分块对角矩阵

$$\operatorname{Ind}_H^G \rho(g) = \begin{pmatrix} \rho^\circ(x_1^{-1}gx_1) & \cdots & \rho^\circ(x_1^{-1}gx_m) \\ \vdots & & \vdots \\ \rho^\circ(x_m^{-1}gx_1) & \cdots & \rho^\circ(x_m^{-1}gx_m) \end{pmatrix}$$

特别地，这个分块矩阵每行每列都只有一个子矩阵非零。 □

定理 6.10. $\operatorname{Ind}_H^G W$ 的特征标

设 $H \leqslant G$，W 是有限维 $\mathbb{C}[H]$ 模。那么对 $g \in G$，有

$$\operatorname{Ind}_H^G \chi_W(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \chi_W^\circ \left(x^{-1}gx\right)$$

Proof. 利用引理 6.9 给出的矩阵，有

$$\operatorname{Ind}_H^G \chi_W(g) = \operatorname{tr} \operatorname{Ind}_H^G \rho(g) = \sum_{i=1}^m \operatorname{tr} \rho^\circ \left(x_i^{-1}gx_i\right) = \sum_{i=1}^m \chi_W^\circ \left(x_i^{-1}gx_i\right)$$

因为 χ_W° 是类函数，

$$\sum_{i=1}^m \chi_W^\circ \left(x_i^{-1}gx_i\right) = \frac{1}{|H|} \sum_{i=1}^m \sum_{h \in H} \chi_W^\circ \left((x_ih)^{-1}gx_ih\right) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \chi_W^\circ \left(x^{-1}gx\right)$$ □

推论 6.11

设 $H \leqslant G$。对 $g \in G$，设 $h_1, ..., h_\ell$ 是 $g^G \cap H \leqslant H$ 中共轭类的代表元，即 $g^G \cap H = \bigcup_{i=1}^{\ell} h_i^H$。那么对于任意有限维 $\mathbb{C}[H]$ 模 W，有

$$\operatorname{Ind}_H^G \chi_W(g) = [G : H] \sum_{i=1}^{\ell} \frac{|h_i^H|}{|g^G|} \chi_W(h_i)$$

Proof. 考虑集合

$$S = \{x \in G :\ x^{-1}gx \in H\} = \bigcup_{y \in g^G \cap H} \{g \in G :\ x^{-1}gx = y\}$$

对固定的 $y = x_0^{-1}gx_0$，注意到有双射 $C_G(g) \to \{g \in G :\ x^{-1}gx = y\}$，$x \mapsto xx_0$。于是由定理 6.10，

$$|H| \operatorname{Ind}_H^G \chi_W(g) = \sum_{x \in G} \chi_W^\circ(x^{-1}gx) = \sum_{x \in S} \chi_W(x^{-1}gx) = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{y \in h_i^H} |C_G(g)| \chi_W(y) = |C_G(g)| \sum_{i=1}^{\ell} |h_i^H| \chi_W(h_i)$$

由轨道-稳定子定理，$|C_G(g)| = |G|/|g^G|$，于是

$$\operatorname{Ind}_H^G \chi_W(g) = [G : H] \sum_{i=1}^{\ell} \frac{|h_i^H|}{|g^G|} \chi_W(h_i)$$ □

6.3 Mackey 既约准则

本节中我们研究诱导模 $\operatorname{Ind}_H^G W$ 是单模的充分必要条件。

定义 6.12. 扭映射

设 $H \leqslant G$，$\rho : H \to \mathrm{GL}(W)$ 是 H 在 W 上的一个表示。对于 H 的共轭子群 xHx^{-1}，我们定义 ρ 的扭映射 $\rho^x : xHx^{-1} \to \mathrm{GL}(W)$，$\rho^x(g) := \rho(x^{-1}gx)$。于是 ρ^x 是 xHx^{-1} 在 W 上的一个表示，我们把这个 W 上的 $k[xHx^{-1}]$ 模结构记为 W_x。

对于 H 的特征标 $\chi : H \to \mathbb{C}$，$\chi^x(g) := \chi(x^{-1}gx)$ 是 xHx^{-1} 的一个特征标。

固定 G 的一个子群 K，我们注意到 $g\in K\cap xHx^{-1}$ 当且仅当 $x=gxh^{-1}\in KxH$。我们考虑 G 的一个 (K,H) 双陪集划分：

$$G=\bigcup_{i=1}^{m}Kx_iH$$

我们有如下定理：

定理 6.13

设 H,K 是 G 的子群，$x_1,...,x_m$ 是 G 的 (K,H) 双陪集划分的代表元，$K_i:=K\cap x_iHx_i^{-1}$，W 是 $k[H]$ 模。令 W_i 是按照定义 6.12 给出的 $k[x_iHx_i^{-1}]$ 模。那么有 $k[K]$ 模同构：

$$\operatorname{Res}_K^G\operatorname{Ind}_H^G W\cong\bigoplus_{i=1}^{m}\operatorname{Ind}_{K_i}^K\operatorname{Res}_{K_i}^{x_iHx_i^{-1}}W_i$$

Proof. 先固定一个 K_i，对于 $y,\tilde{y}\in K$，注意到

$$yK_i=\tilde{y}K_i\iff y^{-1}\tilde{y}\in K_i=K\cap x_iHx_i^{-1}\iff yx_iH=\tilde{y}x_iH$$

若 K 对应每个 K_i 有左陪集分解 $K=\bigcup_{j=1}^{i_r}y_{ij}K_i$，那么 G 有左陪集分解 $G=\bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{r_i}y_{ij}x_iH$。按照命题 6.2 给出诱导模的分解：

$$\operatorname{Ind}_H^G W=\bigoplus_{i=1}^{m}\bigoplus_{j=1}^{r_i}y_{ij}x_ik[H]\otimes_{k[H]}W,\qquad \operatorname{Ind}_{K_i}^K\operatorname{Res}_{K_i}^{x_iHx_i^{-1}}W_i=\bigoplus_{j=1}^{r_i}y_{ij}k[K_i]\otimes_{k[K_i]}W_i$$

由于 W 是 $k[H]$ 模，x_iW 有自然的 $k[x_iHx_i^{-1}]$ 模结构，由 $x_ihx_i^{-1}\cdot x_iw=x_ih\cdot w$ 给出；且易见 $w\mapsto x_iw$ 给出了 $k[x_iHx_i^{-1}]$ 模同构 $W_i\cong x_iW$。

注意到有 $k[K]$ 模同构：

$$y_{ij}x_ik[H]\otimes_{k[H]}W\xrightarrow{\cong}y_{ij}x_i\otimes_{k[H]}W\xrightarrow{\cong}y_{ij}\otimes_{k[K_i]}x_iW\xrightarrow{\cong}y_{ij}k[K_i]\otimes_{k[K_i]}x_iW\xrightarrow{\cong}y_{ij}k[K_i]\otimes_{kK_i}W_i$$

因此有 $k[K]$ 模同构

$$\operatorname{Res}_K^G\operatorname{Ind}_H^G W\cong\bigoplus_{i=1}^{m}\operatorname{Ind}_{K_i}^K\operatorname{Res}_{K_i}^{x_iHx_i^{-1}}W_i$$

□

定理 6.13 的特征标版本如下：

推论 6.14

设 $k=\mathbb{C}$，延续定理 6.13 的记号。设 φ 是 H 的一个特征标，ψ 是 K 的一个特征标，那么有：

1. $\operatorname{Res}_K^G\operatorname{Ind}_H^G\varphi=\sum_{i=1}^{m}\operatorname{Ind}_{K_i}^K\operatorname{Res}_{K_i}^{x_iHx_i^{-1}}\varphi^{x_i}$；
2. $\left\langle\operatorname{Ind}_H^G\varphi,\ \operatorname{Ind}_K^G\psi\right\rangle_G=\sum_{i=1}^{m}\left\langle\operatorname{Res}_{K_i}^{x_iHx_i^{-1}}\varphi^{x_i},\ \operatorname{Res}_{K_i}^K\psi\right\rangle_{K_i}$。

Proof.

1. 把定理 6.13 的结论传递到特征标上即可。
2. 利用 Frobenius 互反律，有

$$\begin{aligned}\left\langle\operatorname{Ind}_H^G\varphi,\ \operatorname{Ind}_K^G\psi\right\rangle_G&=\left\langle\operatorname{Res}_K^G\operatorname{Ind}_H^G\varphi,\ \psi\right\rangle_K=\sum_{i=1}^{m}\left\langle\operatorname{Ind}_{K_i}^K\operatorname{Res}_{K_i}^{x_iHx_i^{-1}}\varphi^{x_i},\psi\right\rangle_K\\&=\sum_{i=1}^{m}\left\langle\operatorname{Res}_{K_i}^{x_iHx_i^{-1}}\varphi^{x_i},\operatorname{Res}_{K_i}^K\psi\right\rangle_{K_i}\end{aligned}$$

□

现在我们令 $K=H$，得到本节的主要结论：

定理 6.15. Mackey 既约准则

设 $H \leqslant G$，$x_1, ..., x_m$ 是 G 的 (H, H) 双陪集划分的代表元，$H_i := H \cap x_i H x_i^{-1}$，$\chi : H \to \mathbb{C}$ 是 H 的一个特征标。则 $\operatorname{Ind}_H^G \chi$ 既约当且仅当 χ 既约，并且 $\operatorname{Res}_{H_i}^H \chi$ 与 $\operatorname{Res}_{H_i}^{x_i H x_i^{-1}} \chi^{x_i}$ 正交对 $i \in \{2, ..., m\}$ 成立。

Proof. 利用推论 6.14，

$$\begin{aligned} \operatorname{Ind}_H^G \chi \text{ 既约} &\iff \left\langle \operatorname{Ind}_H^G \chi,\ \operatorname{Ind}_H^G \chi \right\rangle_G = 1 \\ &\iff \sum_{i=1}^m \left\langle \operatorname{Res}_{H_i}^{x_i H x_i^{-1}} \chi^{x_i},\ \operatorname{Res}_{H_i}^H \chi \right\rangle_{H_i} = 1 \\ &\iff \langle \chi, \chi \rangle = 1\ \wedge\ \forall i \in \{2, ..., m\}\ \left\langle \operatorname{Res}_{H_i}^{x_i H x_i^{-1}} \chi^{x_i},\ \operatorname{Res}_{H_i}^H \chi \right\rangle_{H_i} = 0 \\ &\iff \chi \text{ 既约} \wedge\ \forall i \in \{2, ..., m\}\ \operatorname{Res}_{H_i}^{x_i H x_i^{-1}} \chi^{x_i} \text{ 与} \operatorname{Res}_{H_i}^H \chi \text{ 正交} \end{aligned}$$

□

最后我们考虑正规子群 $N \triangleleft G$，此时有 $NgN = gN$，每个 N 的共轭子群都是 N 自身。

引理 6.16

设 $H \leqslant G$，$\chi : H \to \mathbb{C}$ 是 H 的一个特征标。对 $x \in G$，有

$$\langle \chi^x, \chi^x \rangle_{xHx^{-1}} = \langle \chi, \chi \rangle_H$$

Proof. 直接计算：

$$\langle \chi^x, \chi^x \rangle_{xHx^{-1}} = \frac{1}{|xHx^{-1}|} \sum_{g \in xHx^{-1}} |\chi^x(g)|^2 = \frac{1}{|xHx^{-1}|} \left|\chi(x^{-1}gx)\right|^2 = \frac{1}{|H|} \sum_{g \in H} |\chi(x)|^2 = \langle \chi, \chi \rangle_H$$

□

我们得到如下简单的结论：

推论 6.17

设 $N \triangleleft G$，$\chi : N \to \mathbb{C}$ 是 N 的一个特征标。则 $\operatorname{Ind}_N^G \chi$ 既约当且仅当 χ 既约，且 $\chi^x \neq \chi$ 对于所有 $x \in G \setminus N$ 成立。

Proof. 注意到引理 6.16 表明 χ 既约当且仅当 χ^x 既约，而 χ, χ^x 都是 N 上的特征标，既约的特征标正交当且仅当它们不相等，然后应用定理 6.15。 □

7 应用：Burnside $p^\alpha q^\beta$ 定理

这一章我们研究群表示论的一个应用。我们只考虑 $k = \mathbb{C}$ 的情况。

7.1 代数整数

本节给出有限群 G 的既约复表示的次数与群的阶数 $|G|$ 的关系。

定义 7.1. 代数整数

考虑环扩张 $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{C}$。$\mathbb{Z}$ 上的整元素 $z \in \mathbb{C}$ 称为**代数整数**。换言之，$\alpha \in \mathbb{C}$ 是代数整数当且仅当存在首一多项式 $f \in \mathbb{Z}[x]$ 使得 $f(\alpha) = 0$。全体代数整数的集合是 $\mathbb{Z}$ 在 $\mathbb{C}$ 中的**整性闭包**，记为 $\mathbb{A}$。

交换代数给出了一个关于代数整数的好用的引理：

引理 7.2

$\alpha \in \mathbb{C}$ 是代数整数当且仅当存在一个有限生成的 $\mathbb{Z}$ 模 $M \subseteq \mathbb{C}$ 使得 $\alpha M \subseteq M$。

Proof. " $\Longrightarrow$ ": 设 α 是代数整数，存在 $f \in \mathbb{Z}[x]$ 使得 $f(\alpha)=0$。那么 $\mathbb{Z}[\alpha] \subseteq \mathbb{C}$ 是有限生成 $\mathbb{Z}$ 模，由 $1, \alpha, ..., \alpha^{m-1}$ 生成，其中 $m = \deg f$。显然 $\alpha\mathbb{Z}[\alpha] \subseteq \mathbb{Z}[\alpha]$。

" $\Longleftarrow$ ": 设 M 是有限生成的 $\mathbb{Z}$ 模使得 $\alpha M \subseteq M$。由中山正引理，存在首一多项式 $f \in \mathbb{Z}[x]$ 使得 $f(\alpha)M = \{0\}$。由于 $M \subseteq \mathbb{C}$，我们有 $f(\alpha)=0$，α 是代数整数。 □

推论 7.3

代数整数 $\mathbb{A}$ 构成 $\mathbb{C}$ 的子环。

Proof. 设 $x, y \in \mathbb{A}$。注意到 $\mathbb{Z}[x,y] \subseteq \mathbb{C}$ 是有限生成 $\mathbb{Z}$ 模，且有 $(x-y)\mathbb{Z}[x,y] \subseteq \mathbb{Z}[x,y]$，$xy\mathbb{Z}[x,y] \subseteq \mathbb{Z}[x,y]$。因此 $x-y, xy \in \mathbb{A}$，$\mathbb{A}$ 是 $\mathbb{C}$ 的子环。 □

例 7.4. 代数整数的例子

1. 整数都是代数整数，$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{A}$；
2. $\mathbb{C}$ 的 n 次单位根是 $x^n - 1 = 0$ 的根，因此是代数整数；
3. 容易验证 $\mathbb{Z}$ 是**整闭整环**，因此有理的代数整数就是整数，$\mathbb{A} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$。

命题 7.5

设 χ 是有限群 G 的一个特征标。那么对于 $g \in G$，$\chi(g)$ 是代数整数。

Proof. 设 $\chi_1, ..., \chi_r$ 是 G 的全部互异既约特征标。那么 $\chi(g) = \sum_{i=1}^{r} a_i \chi_i(g)$，其中 $a_i \in \mathbb{Z}$，$\chi_i(g)$ 是 $\mathrm{o}(g)$ 次单位根之和，因此 $\chi_i(g) \in \mathbb{A}$。由于 $\mathbb{A}$ 是 $\mathbb{C}$ 的子环，$\chi(g) \in \mathbb{A}$。 □

引理 7.6

设 G 是有限群。$C_1, ..., C_s$ 是 G 的全部共轭类。考虑命题 2.11 中定义的共轭类和 $\widehat{C}_1, ..., \widehat{C}_s$，它们在 $\mathbb{C}[G]$ 中生成的加性子群 S 是 $Z(\mathbb{C}[G])$ 的子环。

Proof. 由命题 2.11，共轭类和 $\widehat{C}_1, ..., \widehat{C}_s \in Z(\mathbb{C}[G])$。因此只要证 S 对乘法封闭。固定 $i, j \in \{1, ..., s\}$，存在 $a_{ijk}(z) \in \mathbb{C}$ 使得

$$\widehat{C}_i \widehat{C}_j = \left(\sum_{x \in C_i} x \right) \left(\sum_{y \in C_j} y \right) = \sum_{k=1}^{s} \sum_{z \in C_k} a_{ijk}(z) z$$

对 $z \in C_k$ 和 $g \in G$，实际上有

$$\begin{aligned} a_{ijk}(z) &= |\{(x,y) \in C_i \times C_j : \ xy = z\}| = \left| \left\{ (x,y) \in C_i \times C_j : \ g^{-1}xg \cdot g^{-1}yg = g^{-1}zg \right\} \right| \\ &= \left| \left\{ (x,y) \in C_i \times C_j : \ xy = g^{-1}zg \right\} \right| = a_{ijk}(g^{-1}zg) \end{aligned}$$

于是 a_{ijk} 在共轭类 C_k 上是常数，有

$$\widehat{C}_i \widehat{C}_j = \sum_{k=1}^{s} a_{ijk} \widehat{C}_k \in S$$

故 S 是 $Z(\mathbb{C}[G])$ 的子环。 □

回忆定理 2.10 的证明中中定义的中心特征标，我们计算共轭类和给出的中心特征标，证明它们实际上都是代数整数：

命题 7.7

设 V 是单 $\mathbb{C}[G]$ 模，$g\in G$。共轭类和 $\widehat{g^G}$ 在 V 上的作用等价于一个标量：

$$\forall v\in V\quad \widehat{g^G}\cdot v=\frac{|g^G|\chi_V(g)}{\chi_V(e_G)}\cdot v$$

更进一步，这个标量是一个代数整数。

Proof. 由于 $z:=\widehat{g^G}\in Z(\mathbb{C}[G])$，根据定理 2.10 的证明它在 V 上的作用是一个标量乘法 $z_V\in\mathbb{C}$。对这个作用求迹，得

$$\operatorname{tr}\widehat{g^G}=\sum_{x\in g^G}\operatorname{tr}g_V=|g^G|\chi_V(g)=z_V\dim V$$

于是

$$z_V=\frac{|g^G|\chi_V(g)}{\dim V}=\frac{|g^G|\chi_V(g)}{\chi_V(e_G)}$$

下面证 $z_V\in\mathbb{A}$。设 $\rho:G\to\mathrm{GL}(V)$ 是 V 提供的表示，$\rho^*:\mathbb{C}[G]\to\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ 是 ρ 扩展的 $\mathbb{C}$ 代数同态，并且有 $\rho^*(Z(\mathbb{C}[G]))\subseteq\mathbb{C}$。由于 ρ^* 是环同态，由引理 7.6，$\rho^*(S)$ 是 $\mathbb{C}$ 的子环，因此

$$z_V\cdot\rho^*(S)=\widehat{g^G}\cdot\rho^*(S)\subseteq\rho^*(S)$$

另外，$\rho^*(S)$ 作为 $\mathbb{Z}$ 模是有限生成的，因此由引理 7.2，z_V 是代数整数。 □

定理 7.8. Frobenius 整除性

设 G 是有限群，V 是单 $\mathbb{C}[G]$ 模，有 $\dim V$ 整除 $|G|$。

Proof. 设 G 的共轭类为 $C_1,...,C_r$，代表元为 $g_1,...,g_r$。由行正交关系和命题 5.6.1，

$$\langle\chi_V,\chi_V\rangle=\frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^r|C_i|\overline{\chi_V(g_i)}\chi_V(g_i)=\frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^r|C_i|\chi_V(g_i^{-1})\chi_V(g_i)=1$$

这个方程可以变形成

$$\sum_{i=1}^r\chi_V(g_i^{-1})\cdot\frac{|g_i^G|\chi_V(g_i)}{\dim V}=\frac{|G|}{\dim V}$$

利用命题 7.7，命题 7.5，以及 $\mathbb{A}$ 是子环，我们发现等式左边是代数整数，而等式右边是有理数。因此 $|G|/\dim V$ 是整数。$\dim V$ 整除 $|G|$。 □

这个结论可以被进一步改进：

定理 7.9

设 G 是有限群，V 是单 $\mathbb{C}[G]$ 模，有 $\dim V$ 整除 $[G:Z(G)]$。

Proof. 首先固定 $m\in\mathbb{Z}_+$。考虑张量积 $V^{\otimes m}$，其上可以定义 $\mathbb{C}[G^m]$ 模结构，由如下方式给出：

$$\forall(g_1,...,g_m)\in G^m\ \forall v_1\otimes_{\mathbb{C}}\cdots\otimes_{\mathbb{C}}v_m\in V^{\otimes m}\quad(g_1,...,g_m)\cdot(v_1\otimes_{\mathbb{C}}\cdots\otimes_{\mathbb{C}}v_m):=g_1\cdot v_1\otimes_{\mathbb{C}}\cdots\otimes_{\mathbb{C}}g_m\cdot v_m$$

容易验证 V 是单 $\mathbb{C}[G]$ 模当且仅当 $V^{\otimes m}$ 是单 $\mathbb{C}[G^m]$ 模。

考虑 $Z(G)^m\leqslant G^m$ 的子群：

$$H_m:=\{(g_1,...,g_n)\in Z(G)^m:\ g_1\cdots g_n=1\}$$

易见 $|H_m|=|Z(G)|^{m-1}$。

考虑中心特征标 $\varphi:Z(G)\to\mathbb{C}$，我们发现 H_m 在 $V^{\otimes m}$ 上的作用是平凡的：

$$\begin{aligned}(g_1,...,g_m)\cdot(v_1\otimes_{\mathbb{C}}\cdots\otimes_{\mathbb{C}}v_m)&=g_1\cdot v_1\otimes_{\mathbb{C}}\cdots\otimes_{\mathbb{C}}g_m\cdot v_m=\varphi(g_1)v_1\otimes_{\mathbb{C}}\cdots\otimes_{\mathbb{C}}\varphi(g_m)v_m\\&=\varphi(g_1\cdots g_m)v_1\otimes_{\mathbb{C}}\cdots\otimes_{\mathbb{C}}v_m=v_1\otimes_{\mathbb{C}}\cdots\otimes_{\mathbb{C}}v_m\end{aligned}$$

因此 $V^{\otimes m}$ 的 $\mathbb{C}[G^m]$ 模结构诱导了一个 $\mathbb{C}[G^m/H_m]$ 模结构，并且 $V^{\otimes n}$ 仍是单 $\mathbb{C}[G^m/H_m]$ 模。利用定理 7.8，我们有

$$(\dim V)^m = \dim V^{\otimes m} \mid |G^m/H_m| = [G:Z(G)]^m |Z(G)|$$

设 $\alpha := \dfrac{[G:Z(G)]}{\dim V}$。上式表明对任意 $m \in \mathbb{Z}_+$，α^m 都是 $|Z(G)|^{-1}$ 的整数倍。特别地，有 $\mathbb{Z}[\alpha] \subseteq \dfrac{1}{|Z(G)|}\mathbb{Z}$。显然 $\dfrac{1}{|Z(G)|}\mathbb{Z}$ 是有限生成 $\mathbb{Z}$ 模，因此作为前者的子模，$\mathbb{Z}[\alpha]$ 也是有限生成的。由引理 7.2，α 是代数整数，而 α 又是有理数，故 $\alpha \in \mathbb{Z}$，$\dim V$ 整除 $[G:Z(G)]$。 □

7.2 Burnside $p^\alpha q^\beta$ 定理

本节中我们给出群表示论在群论中的一个应用，即特定的一类群不是单群。

Galois 理论给出下面的关键引理：

引理 7.10

设 $\zeta_1, ..., \zeta_n$ 是单位根，设 $\alpha := \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\zeta_i$。若 α 是代数整数，则要么 $\alpha = 0$，要么 $\alpha = \zeta_1 = \cdots = \zeta_n$。

Proof. 存在本原 k 次单位根 ω 使得 $\zeta_1, ..., \zeta_n \in \mathbb{Q}(\omega)$。考虑 Galois 群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\omega) \mid \mathbb{Q})$，以及 α 的**范数**：

$$a := \mathrm{Norm}_{\mathbb{Q}}^{\mathbb{Q}(\omega)}(\alpha) := \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\omega)|\mathbb{Q})} \sigma(\alpha)$$

由于分圆域扩张 $\mathbb{Q}(\omega) \mid \mathbb{Q}$ 是 Galois 扩张，并且 a 在 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\omega) \mid \mathbb{Q})$ 的作用下保持不变，我们有 $a \in \mathbb{Q}$。由于 $\alpha \in \mathbb{A}$，对 $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\omega) \mid \mathbb{Q})$ 有 $\sigma(\alpha) \in \mathbb{A}$，因此 $a \in \mathbb{A}$。于是 $a \in \mathbb{Z}$。

另一方面，每个 $\sigma(\zeta_i)$ 都是单位根，于是

$$|\sigma(\alpha)| = \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma(\zeta_i)\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\sigma(\zeta_i)| = 1 \implies |a| = \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\omega)|\mathbb{Q})}|\sigma(\alpha)| \leqslant 1$$

综合上述讨论我们得出 $a \in \{-1, 0, 1\}$。若 $\alpha \neq 0$，则 $|a| = 1$。有

$$|a| = 1 \implies |\alpha| = 1 \implies \sum_{i=1}^{n}|\zeta_i| = n \implies \alpha = \zeta_1 = \cdots = \zeta_n$$ □

定理 7.11

设 G 的有限群，G 有一个共轭类的元素个数 $|C| = p^n$，其中 p 是素数，$n \geqslant 1$，那么 G 不是单群。

Proof. 设 $\rho_2, ..., \rho_r$ 是 G 的全部互不同构的**非平凡**既约表示，$\chi_2, ..., \chi_r$ 是 $\rho_2, ..., \rho_r$ 给出的特征标。设 $g \in G$ 是是一个非中心元素且 $|g^G| = p^n$。利用列正交关系，有

$$1 + \sum_{i=2}^{r}\chi_i(1)\chi_i(g) = 0$$

假设每个 $\chi_i(1)\chi_i(g)$ 都能被 p 整除，那么由命题 7.5，$-1/p$ 就是代数整数，然而 $-1/p \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$，矛盾。因此存在 $i \in \{2, ..., r\}$ 使得 $p \nmid \chi_i(1)$ 且 $\chi_i(g) \neq 0$。

此时 $\chi_i(1)$ 与 $|g^G|$ 互素，由 Bézout 引理，存在 $a, b \in \mathbb{Z}$ 使得 $a|g^G| + b\chi_i(1) = 1$。因此

$$a\frac{|g^G|\chi_i(g)}{\chi_i(1)} + b\chi_i(g) = \frac{\chi_i(g)}{\chi_i(1)}$$

在命题 7.7 中我们证明了 $\dfrac{|g^G|\chi_i(g)}{\chi_i(1)} \in \mathbb{A}$，由命题 7.5 有 $\chi_i(g) \in \mathbb{A}$。于是 $\dfrac{\chi_i(g)}{\chi_i(1)} \in \mathbb{A}$。

设 $\rho_i(g) \in \mathrm{GL}(V_i)$ 的本征值为 $\zeta_1, ..., \zeta_n$（计重数）。那么 $\dfrac{\chi_i(g)}{\chi_i(1)} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \zeta_i \neq 0$。由引理 7.10 有 $\zeta_1 = \cdots = \zeta_n =: \zeta$。因此 $\rho_i(g) = \zeta\, \mathrm{id}_{V_i}$。$g \in \rho_i^{-1}(\mathbb{C}^\times) \leqslant G$。

假设 G 是单群，那么 $\rho_i^{-1}(\mathbb{C}^\times) = G$，即 $\rho_i(G) = \mathbb{C}^\times$；并且有 $\ker \rho_i = \{e_G\}$。故 G 是 Abel 群。然而这与 g 是非中心元素矛盾。故 G 不是单群。 □

来到本节的中心定理：

定理 7.12. Burnside $p^\alpha q^\beta$ 定理

对于 $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ 和素数 p, q，每个非 Abel 的 $p^\alpha q^\beta$ 阶群都不是单群。

Proof. 不妨设 $\alpha, \beta \geqslant 1$。由 Sylow 第一定理，$G$ 有非平凡的 Sylow p 子群 P。P 有非平凡的中心元素 $g \in Z(P)$。

若 $g \in Z(G)$，那么 $\langle g \rangle$ 是 G 的非平凡正规子群，G 不是单群。

若 $g \notin Z(G)$，注意到 $g \in Z(P)$ 表明 $P \leqslant C_G(g)$。由轨道-稳定子定理，

$$|g^G| = [G : C_G(g)] \;\Big|\; \frac{|G|}{|P|} = q^\beta$$

且 $|g^G| \neq 1$。于是定理 7.11 表明 G 不是单群。 □

推论 7.13

对于 $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ 和素数 p, q，每个 $p^\alpha q^\beta$ 阶群都是可解群。

参考

- Konstantin Ardakov, *Lecture Notes on B2.1 Introduction to Representation Theory* (2020-2021).
- Dan Ciubotaru, *Lecture Notes on B2.1 Introduction to Representation Theory* (2019-2020).
- 丘维声, *群表示论*.
- Erdmann & Holm, *Algebras and Representation Theory*.