

微积分与分析基础的部分扫描笔记

Peize Liu

St Peter's College,
University of Oxford

July 2019

微积分与分析基础的部分扫描笔记

Peize Liu^{*}

St Peter's College, University of Oxford

目录

1	集合	1
1.1	朴素集合论	1
1.2	数理逻辑 [*]	4
1.3	ZFC 集合论 [*]	9
1.4	映射	11
1.5	基数 [*]	18
2	数系	23
2.1	自然数 [*]	23
2.2	整数 [*]	28
2.3	有理数 [*]	32
2.4	实数的构造与表示	38
2.5	实数的完备性与度量	49
2.6	复数	56
2.7	可数集与不可数集	59
3	序列与级数	63
3.1	序列极限	63
3.2	极限的存在性	68
3.3	级数	77
3.4	幂级数	84
4	连续函数	91
4.1	函数极限	91
4.2	函数的连续性	95
4.3	闭区间上的连续函数	100
4.4	单调函数	116
4.5	一致收敛	119
4.6	连续函数空间 [*]	125

^{*}Please send any comment to peize.liu@spc.ox.ac.uk

前言

这份不完全的笔记包含四章，内容大致相当于单变量微积分的微分学之前的部分。作为单变量微积分的笔记，原计划应有微分学和 Riemann 积分两个章节。不过由于大一考试的结束，我不会再续此内容，这份笔记就将以不完全的状态呈现出来。¹

前两章是我在高三暑假所写，当时仍是业余数学学生。开学后未能抽空继续学习数学分析，直到 Hilary Term²结束我决定转到数学系，而为了开学的 collection 考试，需要恶补数学分析缺失的内容，故在假期匆匆写下笔记的三四章。

虽然从初三就开始学微积分，我对它的理解却非常粗浅。之后去学那些“有趣”的数学时，一直搁置了它，以至于到大一它成了我最为头疼的学科。必须承认在物理系中应用的微积分，是以直觉为主的 Newton 时代的产物；而现今大学所授、构成理工科基础的微积分是经过 Cauchy, Gauss, Weierstrass 等人的严格化，建立在 $\varepsilon - \delta$ 语言上的严谨学科。两者的差别是巨大的。在 Oxford 数学系的课程架构中，微积分注重证明的部分和注重计算的部分被分成了两个系列的课程，分别冠以“Analysis”和“Calculus”之名（当然都是必修的）。这个笔记当然算是“Analysis”（国内称为“数学分析”）的范畴，我基本只叙述重要概念和定理及其证明，具体例子和习题可以忽略不计。当然这也是笔记存在的本来目的——只有书写者认为重要的东西才会被记录下来。此外，保持笔记的简洁性对考前的高效复习帮助很大。

值得注意的是这个笔记的顺序和大部分国内的数学分析教材不同——后者往往喜欢把“一致收敛”“级数”“幂级数”等概念放到 Riemann 积分之后才讲。我认识这对认知不利，这些内容自然应当是紧接着序列和函数出现。更何况，利用级数定义 e , $\exp$, $\sin$, $\cos$ 能立刻推广到复数域上，同时简化诸多性质的证明，比如重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x / x$ 。现在采用这种教学顺序的有陈天权的《数学分析讲义》和我们学校自己的讲义。

关于学习教材，我个人非常推崇 Walter Rudin's *Principles of Mathematical Analysis*, 俗称“Baby Rudin”，我认为这是最佳的分析学入门教材，理论上没有前置知识需要，实际上任何具有等同于 AP Calculus BC 知识的初学者都能阅读（至少前 9 章）。推崇的理由和 Linear Algebra Done Right 类似：极简的行文仿佛艺术品般，同时观点很高，在早期就渗透很多度量空间的思想。然而这些“优点”也使得它的阅读难度极大：证明多有跳步，缺乏足够的动机；习题的难度可以劝退不少试图挑战数学的学生。当读不下去时，也可看一些国内教材作为补充，作为精神北大人，我选择的是伍胜健那套《数学分析》。

另外还有一套书值得一提，北大陈天权的《数学分析讲义》。全书共三本。作为名义上的“数学分析”，它涵盖了：单变量微积分、点集拓扑、多元微分学、（抽象测度上的）实分析、复分析、（古典）微分几何。可谓把半个数学系本科内容浓缩在三本书里。难度自然极高，我甚至不敢翻开后两本，因此只对第一本做些简评。它的正文通常写得极其简洁（然而一些证明比较曲折），只有几个最重要的结论，剩下内容都被放在了习题和附录中，习题喜欢拆分定理成多个小问，循循善诱，若能做完将有不小收获。此书尤其擅长让读者用简陋的工具证明一些在后续章节才会遇到的结论。

和通用符号的差异

这个笔记的符号基本与通用符号一致。除了少数几个地方采用了 Zorich 的书的古怪写法：

第二章我用 $]a, b[$ 而非常用的 (a, b) 表示开区间，这个记号由于过于丑陋，在第三章就改回正常写法了。

邻域的符号可能前后不太统一。第四章开头我使用 $U_E^\circ(x)$ 来表示集合 E 中，中心在 x 的去心 δ -邻域。这个符号比较繁复，而后面我偶尔使用度量空间的记号 $B(x, \delta)$ 表示实数集上一个中心在 x 的 δ -邻域。

¹我的知乎专栏有这些笔记的扫描图片版：zhuanlan.zhihu.com/analysis-notes-Tautochrone

²Oxford 每学年三个学期，依次称为 Michaelmas, Hilary 和 Trinity

内容概要

这个笔记涵盖了**数学分析/单变量微积分的微分学之前**的部分，包括简单的一点集合论与数理逻辑、实数理论、序列与级数、函数的连续性，从内容上大致与 Oxford 数学系大一的 **Analysis I 以及 Analysis II 前半部分**对应，并且与 Metric Space 和 Set Theory 略有交叉。打星号的章节是为了完整性或者延展性加入的超纲内容，不影响主线的阅读。

分章节的内容简介：

第一章 集合 主要介绍了集合的基本概念（高中数学复习），集合的运算律和 de Morgan 律，集合的直积，集合的基数，集族与幂集，等价类与划分，商集，命题逻辑，逻辑符号，蕴含，等价， $\mathcal{L}_1$ 公式，谓词逻辑，自由变量与约束变量， $\mathcal{L}_2$ 公式，Russell 悖论，Zermelo-Fraenkel 集合论公理，自然数集定义为最小归纳集，选择公理，良序原理，映射，定义域与目标域，值域，像与原像，像与集合运算的关系，限制，延拓，恒等映射，商映射，复合映射，单射，满射，双射，单射与集合运算关系，左可逆，右可逆，可逆，单同态，满同态，同构，等势，偏序关系与全序关系，Schröder-Bernstein 定理，基数的可比较性，Zorn 引理，Cantor 定理（集合的基数小于自己的幂集）。

第二章 数系 主要介绍了自然数的 Peano 公理，自然数的加法、乘法和序关系，第一与第二数学归纳法，整数环的构造，有理数域（分式域）的构造，有理数域是最小的序域，有理数域的 Archimedes 性，有理数域的不完备性，Dedekind 分割构造实数域，实数域的公理化定义，实数域的唯一性（满足相应公理的完备序域都同构），实数的 q 进制表示，Cantor 闭区间套定理，度量空间的定义，邻域与开集，极限点与闭集，开覆盖与紧集，开集与闭集的性质，紧集的性质，Heine-Borel 有限覆盖定理（实数域上的紧致性等价于有界闭性），Bolzano-Weierstrass 极限点存在定理，闭包，向量空间 $\mathbb{R}^n$ ，复数域的构造，复数域不是序域，实部与虚部，共轭复数，复数的极坐标表示，代数闭域，有限集与无限集，可数集与不可数集，可数集是最小的无限集，整数集、有理数集是可数集，代数数集是可数集，实数集是不可数集， $\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{R}$ 等势。

第三章 序列与级数 主要介绍了序列极限，极限的拓扑刻画，极限的唯一性，收敛序列有界，序列极限运算法则，序列极限保序，序列夹逼定理，无穷大，扩展实数集，子列，收敛序列的子列极限相同，Bolzano-Weierstrass 子列收敛定理，Cauchy 列，Cauchy 收敛准则，等价的六大实数域完备公理，单调序列，观景点定理，单调有界定理，上极限与下极限，上下极限保序，上下极限与子列极限关系，部分和与级数，级数的 Cauchy 准则，几何级数，正项级数，比较判别法的一般形式与极限形式，Cauchy 凝聚判别法，调和级数，自然常数 e ，Leibniz 交错级数判别法，d'Alembert 比例判别法，Cauchy 根式判别法，根式判别法强于比例判别法，绝对收敛与条件收敛，绝对收敛级数不受重排影响，Riemann 重排定理，幂级数，Cauchy-Hadamard 收敛半径公式，Mertens 定理（收敛级数和绝对收敛级数的 Cauchy 乘积是收敛的），幂级数的运算，指数函数的定义和性质，三角函数的定义和性质。

第四章 连续函数 主要介绍了函数极限，Heine 定理（函数极限与序列极限的对应），函数极限运算法则，函数夹逼定理，函数极限的 Cauchy 准则，复合函数极限，单侧极限，重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x/x$ ，函数连续性，连续性的拓扑刻画，间断点及其分类，间断点集稠密的函数，连续点集的 G_δ/F_σ 集刻画，连续性的运算，复合函数的连续性，有理函数、指数函数和三角函数的连续性，实数域上的连通集，连续函数保持连通性，Bolzano-Cauchy 介值定理，零点定理，不动点定理，连续函数保持紧致性，Weierstrass 最值定理，一致连续，Lipschitz 连续，Heine-Cantor 定理（紧集上的连续函数一致连续），一致连续函数保持 Cauchy 列，一致连续函数保持有界性，连续延拓定理，稠密子集上的一致连续函数有唯一连续延拓，Riesz 日出引理，代数基本定理，单调函数，单调函数的间断点，单调函数的连续性等价于保持连通性，连通集上的连续单射严格单调，反函数定理，对数函数，逐点收敛与一致收敛，一致收敛的 Cauchy 准则，Weierstrass-M 判别法，一致收敛保持连续性，Dini 定理，幂级数的一致收敛，Abel 幂级数第二定理，连续函数的度量空间，等度连续，逐点有界与一致有界，紧集上一致收敛的连续函数列等度连续，Arzelà-Ascoli 定理。

参考教材

首先在应试上，我们学校的课程讲义是非常有用的，我也在整理笔记时做了些许参考：³

[1] H. A. Priestley, *Analysis I*.

[2] 钱忠民, *Analysis II*.

主要的行文顺序参考了 Baby Rudin 和陈天权的书。其中 Baby Rudin 恐怕是我最喜欢的初学者必读分析学教材了。

[3] Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, "Baby Rudin".

[4] 陈天权, 数学分析讲义 (第一册) .

其他零星参考的教材有：

[5] V. A. Zorich, *Mathematical Analysis I*. (兼具严谨性和应用的毛式风格)

[6] 陶哲轩, *Analysis*. (从自然数构造实数的几个章节写得很细，推荐阅读)

[7] Halbach, *Logic Manual*. (Oxford 哲学系入门书，参考了一些数理逻辑的东西)

[8] Royden, *Real Analysis*. (实分析教材，度量空间写得清晰简明)

另外，知乎用户 dhchen 的两个关于数学分析的 live 对我的帮助非常大，笔记中几个定理的证明就是出自他的讲义⁴。关于 Schröder-Bernstein 定理和基数可比较定理的证明，我也参考了知乎上的一些回答⁵。

一点小问题

我不幸遗失了第一章的原始扫描图片，所以从知乎专栏上下载，带有水印，可能影响阅读；同时因为扫描机识别的原因，某些页的脚注没有被完整扫描。（我实在懒得重新扫描了，太麻烦了 QAQ）

³可以在这个网址进入对应课程找到讲义：courses.maths.ox.ac.uk/overview/undergraduate

⁴dhchen 的 live 可以从个人主页找到：www.zhihu.com/people/dhchen

⁵Schröder-Bernstein 定理：www.zhihu.com/question/30015911/answer/117414559

基数可比较定理：www.zhihu.com/question/25744399/answer/31537728

集合

§1.1 集合的基本概念

- 朴素集合论把集合看作不加定义的原始概念

□ Def. 集合, 元素

集合是一些确定的对象放在一起的总体;

这些对象称为集合的元素.

- 元素 a 属于集合 A , 记作 $a \in A$, 否则记作 $a \notin A$.

※ 集合有确定性、互异性、无序性.

互异性: $\{a, a\} = \{a\}$

无序性: $\{a, b\} = \{b, a\}$.

- 集合的表示: 列举法、描述法.

列举法: $\{1, 2, 3\}, \{0, 1, 2, \dots\}$.

描述法: $\{x | P(x)\}$ 表示所有满足性质 P 的元素的集合.

□ Def. 子集, 真子集

若 A 中所有元素都是 B 的元素, 则 A 是 B 的子集, 记作 $A \subset B$;

若 $A \subset B$ 且 A 与 B 不代表同一集合, 则 A 是 B 的真子集, 记作 $A \subsetneq B$.

□ Def. 空集 $\emptyset$

没有元素的集合称为空集, 记作 $\emptyset$.

※ $\emptyset \subset A, A \subset A$.

□ Def. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

自然数集 $\mathbb{N} \subsetneq$ 整数集 $\mathbb{Z} \subsetneq$ 有理数集 $\mathbb{Q} \subsetneq$ 实数集 $\mathbb{R} \subsetneq$ 复数集 $\mathbb{C}$

□ Def. 集合相等

$A = B$ 当且仅当 A 和 B 的元素完全相同

※ $A = B$ 当且仅当 $A \subset B$ 且 $B \subset A$.

▶ 集合的运算

□ Def. 交集 $\cap$, 并集 $\cup$

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

$$* A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset.$$

□ Def. 不交的

若 $A \cap B = \emptyset$, 则称 A 与 B 是不交的.

□ Def. 补集(差集) \

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$

(高中常把 $A \setminus B$ 写作 $C_A B$, 也有 $A - B$ 的写法)

• 集合的运算律

交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$

结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

分配律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

de Morgan 律: $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

□ Def. 直积 (Cartesian 积) $\times$

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}^{\textcircled{1}}$$

例 $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

$$\{1, 2, 3\} \times \{1, 2\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}.$$

□ Def. 基数

有限集合 A 的基数定义为 A 的元素个数, 记作 $\text{card}(A)$ 或 $|A|$.

• 1) 若 $A \subset B$, 则 $|A| \leq |B|$

2) 若 $A \subsetneq B$, 则 $|A| < |B|$

3) (容斥原理) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$$4) |A \times B| = |A| \times |B|.$$

□ Def. 二元关系

集合 A 上的二元关系 R 是 $A \times A$ 的一个子集.

若 $(a, b) \in R$, 称元素 a 与 b 有关系 R , 简记为 $a R b$.

□ Def. 等价关系, 等价类

若二元关系 R 满足以下条件, 则 R 称为 A 上的等价关系

1) 自反性: $a R a$

2) 对称性: 若 $a R b$, 则 $b R a$

3) 传递性: 若 $a R b$ 且 $b R c$, 则 $a R c$

等价关系一般记作 $\sim$

等价类是由等价关系构造的 A 的子集:

对 $a \in A$, 等价类 $[a]_{\sim} := \{b \in A \mid b \sim a\}$

► 族与商集

□ Def. 族, 幂集

族是“集合的集合”, 族的元素是集合.

集合 A 的所有子集的集合称为 A 的幂集, 记作 $\mathcal{P}(A)$.

※ 对有限集 A , $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

• 利用族可以定义集合的任意交与任意并:

对族 $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ 中元素的并

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A := \{x \mid x \in A \text{ 对至少一个 } A \in \mathcal{A}\}$$

$\mathcal{A}$ 中元素的交

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A := \{x \mid x \in A \text{ 对所有 } A \in \mathcal{A}\} \quad \textcircled{0}$$

□ Def. 划分

集合 A 的一个划分是由 A 的非空不交子集构成的族, 且这些子集的并等于 A .

• 设集合 A 上有等价关系 $\sim$, 则 A 上等价类的集合是 A 的划分

① 该定义在 $\mathcal{A} = \emptyset$ 时会出问题

证 ① 等价类的并等于 A :

对任意 $a \in A$, 有 $a \in [a]_{\sim}$

$$\Rightarrow A = \bigcup_{a \in A} [a]_{\sim}$$

② 等价类要么相等, 要么不交:

对任意 $a, b \in A$:

若 $a \sim b$, 则 $a, b \in [a]_{\sim}$ 且 $a, b \in [b]_{\sim} \Rightarrow [a]_{\sim} = [b]_{\sim}$

若 $a \not\sim b$, 假设存在 $c \in [a]_{\sim} \cap [b]_{\sim}$

则 $a \sim c, b \sim c \Rightarrow a \sim b$ 矛盾

$$\Rightarrow [a]_{\sim} \cap [b]_{\sim} = \emptyset$$

□ Def. 商集

定理 1-1 定义的划分称为 A 在 $\sim$ 下的商集, 记为 $A/\sim$

例 $\mathbb{Z}$ 上模 3 同余是一个等价关系, 其定义的商集为 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

同余类 $[a] := \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv a \pmod{3}\}$

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} := \{[a] \mid a \in \mathbb{Z}\}$$

► 映射

□ Def. 映射

从集合 A 到集合 B 的映射 f 是 $A \times B$ 的一个子集, 满足:

1) 对任意 $a \in A$, 存在 $b \in B$ 使 $(a, b) \in f$ (存在性)

2) $(a, b) \in f$ 且 $(a, c) \in f$ 当且仅当 $b = c$ (唯一性)

一般记为 $f: A \rightarrow B, a \mapsto b$. 记 $b = f(a)$

* 映射的详细理论放在 §1.4 讲

§1.2 数理逻辑

► 命题逻辑

□ Def 命题

命题是有确定真假性的陈述句.

- 逻辑连接符 $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$

逻辑符号	$\neg$	$\vee$	$\wedge$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
自然语言	否/非	或	与	若...则...	当且仅当

□ Def. $\mathcal{L}_1$ 公式(命题)

1) 所有的命题都是 $\mathcal{L}_1$ 公式

2) 若 $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_1$, 则 $\neg\varphi, \varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \varphi \rightarrow \psi, \varphi \leftrightarrow \psi \in \mathcal{L}_1$

※ 有时候把 $\neg, \wedge$ 视为元符号, 则可定义^①

$$\varphi \vee \psi := \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$$

$$\varphi \rightarrow \psi := \neg\varphi \vee \psi$$

$$\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$$

□ Def. $\mathcal{L}_1$ 结构(指派)

$\mathcal{L}_1$ 结构 $\mathcal{A}$ 是映射 $\mathcal{A}: S \rightarrow \{T, F\}$, 其中 S 是一些简单命题构成的集合.

• 逻辑符号与真值表

φ	ψ	$\neg\varphi$	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \rightarrow \psi$	$\varphi \leftrightarrow \psi$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

□ Def. 重言式, 矛盾式

若对任意 $\mathcal{L}_1$ 结构 $\mathcal{A}$ 有 $\mathcal{A}(\varphi) = T$, 则称 φ 为重言式, 记为 $\models \varphi$;

若对任意 $\mathcal{L}_1$ 结构 $\mathcal{A}$ 有 $\mathcal{A}(\varphi) = F$, 则称 φ 为矛盾式.

□ Def. 蕴涵 $\Rightarrow$

设 S 是一些命题的集合, $\varphi \in \mathcal{L}_1$, 若不存在 $\mathcal{L}_1$ 结构 $\mathcal{A}$ 使得 S 中所

① 逻辑符号运算优先级为 $\neg > \wedge > \vee > \rightarrow, \leftrightarrow$

有命题为真而 $\mathcal{A}(\varphi) = F$, 则称 S 蕴涵 φ , 或 S 可推出 φ .

记为 $S \Rightarrow \varphi$. (逻辑学中是 $S \models \varphi$)

- $\varphi \Rightarrow \varphi$ 当且仅当 $\varphi \rightarrow \varphi$ 是重言式.
- $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \Rightarrow \varphi$ 当且仅当 $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \varphi$ 是重言式.

□ Def. 等价

若 $\varphi \Rightarrow \psi$ 且 $\psi \Rightarrow \varphi$, 则称 φ 与 ψ 等价, 记为 $\varphi \Leftrightarrow \psi$.

- φ 是 ψ 的...

$\varphi \Rightarrow \psi$	$\varphi \Leftarrow \psi$	$\varphi \Leftrightarrow \psi$
充分条件	必要条件	充要条件

• 逻辑符号的运算律

1) 交换律 $\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \psi \vee \varphi$, $\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \psi \wedge \varphi$

2) 结合律 $(\varphi \vee \psi) \vee \chi \Leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \chi)$,

$(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \Leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$

3) 分配律 $\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \Leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$,

$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$

4) de Morgan 律 $\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$,

$\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$.

• 命题 $p \rightarrow q$ 的各种形式

原命题	否命题	逆命题	逆否命题	命题的否定
$p \rightarrow q$	$\neg p \rightarrow \neg q$	$q \rightarrow p$	$\neg q \rightarrow \neg p$	$\neg(p \rightarrow q)$
$(\neg p \vee q)$	$(p \vee \neg q)$	$(\neg q \vee p)$	$(q \vee \neg p)$	$(p \wedge \neg q)$

※ 原命题 $\Leftrightarrow$ 逆否命题; 否命题 $\Leftrightarrow$ 逆命题

► 一阶逻辑 (谓词逻辑)

※ 命题逻辑处理句子间的逻辑关系, 而谓词逻辑可处理句内的主谓关系.

□ Def. 全称量词, 存在量词

全称量词 $\forall$, 读作 "对于任意..."; 存在量词 $\exists$, 读作 "存在..." 或

“至少有一个...”

- 一阶逻辑 L_2 中的元素包括变量 $x, y, z, \dots$, 常量 $a, b, c, \dots$, 谓词 $P, Q, R, \dots$ 和映射 $f, g, h, \dots$.

□ Def. L_2 的原子公式, 公式

L_2 的原子公式是形如 $x_1 = x_2$ 或 $R(x_1, \dots, x_n)$ 的式子. 其中 $x_1, \dots, x_n$ 是变量, 常量或含有变量或常量的映射, R 是 n 元谓词.

L_2 的公式:

1) 所有的 L_2 原子公式都是 L_2 公式

2) 若 φ, ψ 是 L_2 公式, 则 $\varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \neg \varphi, \varphi \rightarrow \psi, \varphi \leftrightarrow \psi$ 都是 L_2 公式

3) 若 x 是变量, φ 是 L_2 公式, 则 $\forall x \varphi, \exists x \varphi$ 都是 L_2 公式.

□ Def. 自由变量

1) 原子公式中的变量是自由变量

2) φ 与 ψ 中的自由变量在 $\varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \neg \varphi, \varphi \rightarrow \psi, \varphi \leftrightarrow \psi$ 中仍是自由变量

3) $\forall x \varphi$ 或 $\exists x \varphi$ 中所有变量 x 都不是自由变量; φ 中非 x 的自由变量在 $\forall x \varphi$ 和 $\exists x \varphi$ 中仍是自由变量

□ Def. L_2 语句

没有自由变量的 L_2 公式称为 L_2 语句.

例 $\forall x (P(x, y) \rightarrow Q(x, y))$ 不是 L_2 语句, 变量 y 是自由变量.

例 (三段论) $(\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge P(a)) \rightarrow Q(a)$

大前提 $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$

小前提 $P(a)$

结论 $Q(a)$

□ Def. 词表, L_2 结构

一个词表是一些常量、映射、谓词（字母）构成的集合。

词表 $\mathcal{V}$ 上的 $\mathcal{L}_2$ 结构是 (D, I) ，其中 D 是非空集合（称为全集）， I 是映射，把：

1) $\mathcal{V}$ 中的常量字母映到 D 上的元素

2) $\mathcal{V}$ 中的 n 元谓词字母映到 D 上的 n 元关系（即 D^n 的子集）

3) $\mathcal{V}$ 中的 n 元映射字母映到映射 $D^n \rightarrow D$ 。

※ $\mathcal{L}_2$ 结构不对变量赋值（由于量词的存在）

• $\mathcal{L}_2$ 结构下的真值

为了方便讨论 $\mathcal{L}_2$ 公式的真值，引入变量指派：

$\mathcal{L}_2$ 上结构 $\mathcal{A}$ 的变量指派 α 是把全体变量映射到全集 D 的映射。

1) $|t_1 = t_2|_{\mathcal{A}}^{\alpha} = T$ 当且仅当 $|t_1|_{\mathcal{A}}^{\alpha} = |t_2|_{\mathcal{A}}^{\alpha}$ （作为 D 中的元素），其中 t_1, t_2 是变量、常量或映射，下同。

2) $|P(t_1, \dots, t_n)|_{\mathcal{A}}^{\alpha} = T$ 当且仅当 $(|t_1|_{\mathcal{A}}^{\alpha}, \dots, |t_n|_{\mathcal{A}}^{\alpha}) \in I(P) = |P|_{\mathcal{A}}$

3) $|\varphi \wedge \psi|_{\mathcal{A}}^{\alpha} = T$ 当且仅当 $|\varphi|_{\mathcal{A}}^{\alpha} = T$ 且 $|\psi|_{\mathcal{A}}^{\alpha} = T$

4) $|\neg \varphi|_{\mathcal{A}}^{\alpha} = T$ 当且仅当 $|\varphi|_{\mathcal{A}}^{\alpha} = F$

5) $|\exists x \varphi|_{\mathcal{A}}^{\alpha} = T$ 当且仅当存在至少一个 $\mathcal{A}$ 上的 β 使得 $|\varphi|_{\mathcal{A}}^{\beta} = T$ ，其中 β 与 α 至多在 x 的指派上不同^①。

• $\mathcal{L}_2$ 语句 φ 在结构 $\mathcal{A}$ 下为真当且仅当 $|\varphi|_{\mathcal{A}}^{\alpha} = T$ 对所有 $\mathcal{A}$ 上的变量指派 α 。

► 数学中的一些书写习惯。

• “存在唯一...” 记为 $\exists!$ ！

$$\exists! x \varphi(x) := \exists x (\varphi(x) \wedge \forall y (\varphi(y) \rightarrow y = x))$$

• 限定变量范围

$$\forall x \in A (\varphi(x)) := \forall x (x \in A \rightarrow \varphi(x))$$

$$\exists x \in A (\varphi(x)) := \exists x (x \in A \wedge \varphi(x))$$

例 (函数极限定义) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A :=$

① $\forall x \varphi$ 可表示为 $\neg \exists x \neg \varphi$ ，因此可知 $|\forall x \varphi|_{\mathcal{A}}^{\alpha}$ 的真值

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} (0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)$$

※ 量词的顺序不可交换!

例 $\neg (\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A) \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in \mathbb{R} (0 < |x - a| < \delta \wedge |f(x) - A| \geq \varepsilon)$

※ $\neg \forall x \varphi = \exists x \neg \varphi$; $\neg \exists x \varphi = \forall x \neg \varphi$

§1.3* ZFC集合论

► Russell悖论

朴素集合论认为一切性质皆对应集合:

(概括公理) $y \in \{x | P(x)\} \Leftrightarrow P(y)$

定义 $A := \{x | P(x)\} := \{x | x \notin x\}$

则命题 $A \in A$ 与其否定 $A \notin A$ 真值相同!

※ 以上悖论称为“Russell悖论”，其原因是概括公理允许过大的集合的存在，而解决方案是引入一系列公理限制集合的构造。

► Zermelo-Fraenkel集合论

□ A1. 外延公理

集合 $A = B$ 当且仅当 A 与 B 元素相同。

$$\forall A \forall B (A = B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B))$$

※ 集合中的元素是集合的唯一性质

□ A2. 分离公理

对集合 A 与性质 P ，存在集合 B ，其元素是 A 中具有性质 P 的元素

$$B = \{x \in A | P(x)\}$$

※ 弱化版“概括公理”

□ A3. 配对公理

对集合 A, B ，存在集合 C ，其元素恰为 A, B

$$\forall A \forall B \exists C (C = \{A, B\})$$

□ A4. 并集公理

对族 A , 存在集合 $\cup A$, 其元素是 A 中元素的元素.

$$\forall A \exists \cup A \forall x (x \in \cup A \Leftrightarrow \exists B (x \in B \wedge B \in A))$$

※ 族 A 的交可由此定义为:

$$\cap A := \{x \in \cup A \mid \forall B (B \in A \Rightarrow x \in B)\}$$

□ A5. 幂集公理

对集合 A , 存在集合 $\mathcal{P}(A)$, 其元素是 A 的所有子集.

$$\forall A \exists \mathcal{P}(A) \forall B (B \subseteq A \Rightarrow B \in \mathcal{P}(A))$$

※ 集合的 Cartesian 积可由此定义为:

$$A \times B := \{p \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)) \mid p = (x, y) \wedge x \in A \wedge y \in B\}$$

其中 $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

• $A_1 \sim A_5$ 限制了新集合的构造.

• 空集 $\emptyset$ 的构造

1) 对任意集合 A , 存在空子集 $\emptyset_A := \{x \in A \mid x \neq x\}$. (A_2)

2) $\forall A \forall B (\emptyset_A = \emptyset_B)$ (A_1).

即空集是唯一的.

□ A6. 无穷公理

定义集合 A 的后继集 $A^+ := A \cup \{A\}$.

存在归纳集, 其元素包括空集和任何其内的集合的后继集.

$$\exists A (\emptyset \in A \wedge \forall B (B \in A \Rightarrow B \cup \{B\} \in A))$$

※ 无限集存在.

※ 自然数集 N_0 可由此定义为最小归纳集 (一切归纳集之交)

N_0 的元素 $\emptyset, \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}, \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \dots$

对应自然数 $0, 1, 2, \dots$

(关于自然数的 Peano 公理描述见 § 2.1)

□ A7. 置换公理

映射的像构成集合.

$$\forall P^2 (\forall x_0 \in A \exists! y_0 P^2(x_0, y_0) \Rightarrow y_0 \in \{y \mid x \in A \wedge P^2(x, y)\})$$

※ $\uparrow$ - 阶逻辑不允许量化谓词.

□ A8. 正则公理

对非空集 A , 存在元素 B 使得 A 与 B 不交.

$$\forall A (\neg A = \emptyset \Rightarrow \exists B (B \in A \wedge \neg \exists x (x \in B \wedge x \in A)))$$

※ 一个集合不能是自己的元素, 排除 Russell 悖论

※ 可对集合的基数引入序.

• $A1 \sim A8$ 共同构成 ZF 集合论的基本公理

▷ 选择公理

□ AC. 选择公理

对非空集的族 A , 存在集合 C , 使对每个 $B \in A$, $B \cap C$ 是单元素集

$$\forall A (\emptyset \notin A \Rightarrow \exists C \forall B (B \in A \Rightarrow \exists! x (x \in B \cap C)))$$

※ AC 独立于 $A1 \sim A8$; $A1 \sim A8 + AC$ 构成 ZFC 集合论

• 选择公理的一些等价表述

※ (良序原理) 每个集合都能引入一个全序关系, 使得每个非空子集都有最小元

※ 每个向量空间都有 Hamel 基

§1.4 映射

※ 在 §1.1 中映射 $f: A \rightarrow B$ 被定义为 $A \times B$ 的一个特殊子集:

• 一般地说, 映射 $f: A \rightarrow B$ 是指 $\forall x \in A \exists! y \in B (y = f(x))$.

或 $f: x \mapsto y$

(箭头 " $\rightarrow$ " 表示集合之间的关系, " $\mapsto$ " 表示元素之间的关系)

□ Def. 定义域, 目标域, 值域

$f: A \rightarrow B$, A 称为 f 的定义域, B 称为 f 的目标域(陪域)

而值域 $\text{Im}f := \{y \in B \mid \exists x \in A (y = f(x))\} \subset B$.

※ 若 $E \subset \mathbb{R}$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 称为(一元实)函数.

□ Def. 像, 原像

对定义域的子集 $C \subset A$, C 在 f 下的像定义为

$$f[C] := \{y \in B \mid \exists x \in C (y = f(x))\}$$

由此可见值域 $\text{Im}f$ 就是定义域在 f 下的像 $f[A]$.

而对目标域的子集 $D \subset B$, 顺着映射反推回去, 定义 D 在 f 下的原像

$$f^{-1}[D] := \{x \in A \mid \exists y \in D (y = f(x))\}$$

※ 原像 f^{-1} 只是形式化的记号, 不是逆映射!

例 $\mathbb{R}^n$ 中的点是 $\{1, 2, \dots, n\}$ 到 $\mathbb{R}$ 的函数.

数列 $\{a_n\}$ 是 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ 的函数.

• 映射相等, 当且仅当它们的定义域和对应法则相等.

$$f = g \iff \forall x \in A (f(x) = g(x))$$

□ Def. 限制, 延拓

设 $f: A \rightarrow B$, 对 $C \subset A$, 定义 f 在 C 上的限制 $f|_C: C \rightarrow B$ 为

$$\forall x \in C (f|_C(x) := f(x))$$

相应地, f 称为 $f|_C$ 在 A 上的延拓.

□ Def. 恒等映射 id_A

对任意非空集合 A , A 上的恒等映射 id_A 把 A 的每个元素都映到自身

$$\forall x \in A (\text{id}_A(x) := x)$$

□ Def. 商映射 π_A

设集合 A 上有等价关系 $\sim$, 商映射 $\pi_A: A \rightarrow A/\sim$

$$\forall x \in A (\pi_A(x) := [x]_{\sim})$$

• 映射与集合运算

设集族 $\{S_\alpha | \alpha \in I\}$, 映射的像与原像有如下关系:

$$1) f[\bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha] = \bigcup_{\alpha \in I} f[S_\alpha]$$

$$2) f[\bigcap_{\alpha \in I} S_\alpha] \subset \bigcap_{\alpha \in I} f[S_\alpha] \quad (\text{不是等于!!!})$$

$$3) f^{-1}[\bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha] = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}[S_\alpha]$$

$$4) f^{-1}[\bigcap_{\alpha \in I} S_\alpha] = \bigcap_{\alpha \in I} f^{-1}[S_\alpha]$$

证

$$1) \text{ 对 } y \in f[\bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha], \exists x \in \bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha (y = f(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha \in I \exists x \in S_\alpha (y = f(x)) \Leftrightarrow \exists \alpha \in I (y \in f[S_\alpha])$$

$$\Leftrightarrow y \in \bigcup_{\alpha \in I} f[S_\alpha]. \text{ 即 } f[\bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha] = \bigcup_{\alpha \in I} f[S_\alpha]$$

$$2) \text{ 对 } y \in f[\bigcap_{\alpha \in I} S_\alpha], \exists x \in \bigcap_{\alpha \in I} S_\alpha (y = f(x))$$

$$\Rightarrow \forall \alpha \in I \exists x \in S_\alpha (y = f(x)) \Leftrightarrow \forall \alpha \in I (y \in f[S_\alpha])$$

$$\Leftrightarrow y \in \bigcap_{\alpha \in I} f[S_\alpha]. \text{ 即 } f[\bigcap_{\alpha \in I} S_\alpha] \subset \bigcap_{\alpha \in I} f[S_\alpha]$$

(第一个 $\Rightarrow$ 的反推不成立)

$$3) \text{ 对 } x \in f^{-1}[\bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha], \exists y \in \bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha (y = f(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha \in I \exists y \in S_\alpha (y = f(x)) \Leftrightarrow \exists \alpha \in I (x \in f^{-1}[S_\alpha])$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}[S_\alpha]. \text{ 即 } f^{-1}[\bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha] = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}[S_\alpha]$$

还要考虑空集的情况: $f^{-1}[\bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha] = \emptyset$

$$\Leftrightarrow \bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha \cap \text{Im} f = \emptyset \Leftrightarrow \forall \alpha \in I (S_\alpha \cap \text{Im} f = \emptyset)$$

$$\Leftrightarrow \forall \alpha \in I (f^{-1}[S_\alpha] = \emptyset) \Leftrightarrow \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}[S_\alpha] = \emptyset$$

$$4) \text{ 对 } x \in f^{-1}[\bigcap_{\alpha \in I} S_\alpha], \exists y \in \bigcap_{\alpha \in I} S_\alpha (y = f(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall \alpha \in I \exists y \in S_\alpha (y = f(x)) \Leftrightarrow \forall \alpha \in I \exists y_\alpha \in S_\alpha (y_\alpha = f(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall \alpha \in I (x \in f^{-1}[S_\alpha]) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in I} f^{-1}[S_\alpha]$$

$$\text{即 } f^{-1}[\bigcap_{\alpha \in I} S_\alpha] = \bigcap_{\alpha \in I} f^{-1}[S_\alpha]$$

空集的证明与3)基本相同。

例 给出一个 $f[\bigcap_{\alpha \in I} S_\alpha] \neq \bigcap_{\alpha \in I} f[S_\alpha]$ 的例子

假设映射 f 满足 $y = f(x_1) = f(x_2)$.

有 $f[\{x_1\}] \cap f[\{x_2\}] = \{y\} \cap \{y\} = \{y\}$

$f[\{x_1\} \cap \{x_2\}] = f[\emptyset] = \emptyset$

显然 $f[\{x_1\} \cap \{x_2\}] \neq f[\{x_1\}] \cap f[\{x_2\}]$

• 映射的复合

设 $f: A \rightarrow B, g: C \rightarrow D$, 若 $B \subset C$, 则定义 f 与 g 的复合:

$g \circ f: A \rightarrow D, \forall x \in A (g \circ f(x) = g(f(x)))$

• 映射的复合满足结合律

$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

证 $h \circ (g \circ f)(x) = h(g \circ f(x)) = h(g(f(x))) = h \circ g(f(x))$
 $= (h \circ g) \circ f(x)$ □

※ 映射的复合没有交换律. $g \circ f \neq f \circ g$ (甚至没有定义)

□ Def. 单射. 满射. 双射

映射 $f: A \rightarrow B$ 称为单射, 若 $\forall x, y \in A (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$

映射 $f: A \rightarrow B$ 称为满射, 若 $B = \text{Im } f$

映射 $f: A \rightarrow B$ 称为双射, 若 f 既单又满.

例 自然投影 π_A, π_B .

对集合 A, B , 有自然投影 $\pi_A: A \times B \rightarrow A, (a, b) \mapsto a$

和 $\pi_B: A \times B \rightarrow B, (a, b) \mapsto b$

π_A, π_B 是满射.

• 单射与集合运算

以下命题等价:

1) $f: A \rightarrow B$ 是单射

2) $\forall C \subset A (f^{-1}[f[C]] = C)$

3) $\forall C, D \subset A (f[C \cap D] = f[C] \cap f[D])$

4) $\forall D \subset C \subset A (f[C \setminus D] = f[C] \setminus f[D])$

证 (1) $\Rightarrow$ (2) :

首先, 对任意 $g: A \rightarrow B$ 和 $C \subset A$, 有:

$$\forall x (x \in C \Rightarrow \exists y \in g[C] (y = g(x)) \Rightarrow x \in g^{-1}[g[C]]) \Leftarrow \\ \Rightarrow C \subset g^{-1}[g[C]]$$

$$\forall x (x \in f^{-1}[f[C]] \Rightarrow \exists y \in f[C] (y = f(x)))$$

$$\Rightarrow \exists x' \in C \exists y \in f[C] (y = f(x) = f(x')) \Rightarrow x = x'$$

$$\Rightarrow x \in C) \Rightarrow f^{-1}[f[C]] \subset C$$

$$\text{即 } C = f^{-1}[f[C]]$$

(2) $\Rightarrow$ (1) :

假设 f 不是单射. 即 $\exists y \in B \exists x_1, x_2 \in A (x_1 \neq x_2 \wedge y = f(x_1) = f(x_2))$

$$f^{-1}[f[\{x_1\}]] = f^{-1}[\{y\}] = \{x_1, x_2\} \neq \{x_1\}, \text{矛盾. } f \text{ 是单射}$$

(1) $\Rightarrow$ (3) :

$$\text{已有 } f[A \cap B] \subset f[A] \cap f[B]$$

$$\forall y (y \in f[A] \cap f[B] \Rightarrow y \in f[A] \wedge y \in f[B])$$

$$\Rightarrow \exists x_1 \in A (y = f(x_1)) \wedge \exists x_2 \in B (y = f(x_2))$$

$$\Rightarrow \exists x \in A (y = f(x)) \wedge \exists x \in B (y = f(x))$$

$$\Rightarrow \exists x \in A \cap B (y = f(x)) \Rightarrow y \in f[A \cap B] \Rightarrow f[A] \cap f[B] \subset f[A \cap B]$$

$$\text{即 } f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$$

(3) $\Rightarrow$ (1) : 反例同 (2) $\Rightarrow$ (1)

(3) $\Rightarrow$ (4) :

$$f[C] = f[(C \setminus D) \cup D] = f[C \setminus D] \cup f[D]$$

$$f[C \setminus D] \cap f[D] = f[(C \setminus D) \cap D] = f[\emptyset] = \emptyset$$

$$\Rightarrow f[C \setminus D] = f[C] \setminus f[D]$$

(4) $\Rightarrow$ (1) : 反例同 (2) $\Rightarrow$ (1).

• $f: A \rightarrow B$ 是满射, 当且仅当 $\forall Y \subset B (f[f^{-1}[Y]] = Y)$

证 首先对任意 $g: A \rightarrow B$ 和 $Y \subset B$, 有:

$$\forall y (y \in g[g^{-1}[Y]] \Rightarrow \exists x \in g^{-1}[Y] (y = f(x)) \Rightarrow y \in Y) \\ \Rightarrow g[g^{-1}[Y]] \subset Y$$

若 $f: A \rightarrow B$ 是满射, 有:

$$\forall y (y \in Y \Rightarrow \exists x \in f^{-1}[Y] (y = f(x)) \Rightarrow y \in f[f^{-1}[Y]]) \\ \Rightarrow Y \subset f[f^{-1}[Y]] \quad \text{其中第一个} \Rightarrow \text{是因为满射} \\ \Rightarrow Y = f[f^{-1}[Y]]$$

若 $f: A \rightarrow B$ 不是满射, 取 $Y = B \setminus \text{Im } f \neq \emptyset$.

$$\text{有 } f[f^{-1}[Y]] = f[\emptyset] = \emptyset \neq Y. \quad \square$$

□ Def. 左可逆, 右可逆, 可逆

$f: A \rightarrow B$ 称为左可逆的, 若 $\exists g: B \rightarrow A (g \circ f = \text{id}_A)$, g 称为 f 的左逆;

$f: A \rightarrow B$ 称为右可逆的, 若 $\exists h: B \rightarrow A (f \circ h = \text{id}_B)$, h 称为 f 的右逆;

$f: A \rightarrow B$ 称为可逆的, 若 f 既左可逆又右可逆的.

• 可逆映射的左逆等于右逆.

证 设可逆映射 $f: A \rightarrow B$ 的左逆为 g , 右逆为 h .

$$g = g \circ \text{id}_B = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = \text{id}_A \circ h = h. \quad \square$$

※ 可逆映射的逆映射记为 $f^{-1}: B \rightarrow A$, f^{-1} 是唯一的.

$$\text{有 } f \circ f^{-1} = \text{id}_B, f^{-1} \circ f = \text{id}_A.$$

• 可逆性与元素对应

1) $f: A \rightarrow B$ 是单射当且仅当 f 左可逆

2) $f: A \rightarrow B$ 是满射当且仅当 f 右可逆

3) $f: A \rightarrow B$ 是双射当且仅当 f 可逆.

证 1) 充分性: 设 $x \neq x' \in A$, g 为 f 的左逆.

$$g \circ f(x) = x \neq x' = g \circ f(x') \Rightarrow f(x) \neq f(x') \Rightarrow f \text{ 是单射}$$

必要性: 若 f 是单射, 则 $\forall y \in \text{Im } f \exists! x \in A (y = f(x))$

记对应的 $x = f^{-1}(y)$.

$$\text{设 } g(y) = \begin{cases} f^{-1}(y) & y \in \text{Im } f \\ k & y \in B \setminus \text{Im } f \end{cases}, \text{ 给定 } k \in A.$$

可见 $\forall x \in A (g \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x) \Rightarrow g \circ f = \text{id}_A \Rightarrow g$ 是 f 的左逆.

2) 充分性: 设 h 为 f 的右逆.

$$\forall y \in B (y = \text{id}_B(y) = f \circ h(y) = f(h(y)))$$

$$\Rightarrow \forall y \in B \exists h(y) \in A (y = f(h(y))) \Rightarrow f \text{ 是满射}$$

必要性: 若 f 为满射, 则 $\forall y \in B \exists x \in A (y = f(x))$

对 $y \in B$, 设集合 $S_y = \{x \in A \mid f(x) = y\}$, 每个 S_y 都非空
由选择公理, 从 $\bigcup_{y \in B} S_y$ 中选出一组 (x, y) 定义 $h: B \rightarrow A, y \mapsto x$.

于是 $\forall y \in B (f \circ h(y) = f(x) = y) \Rightarrow h$ 是 f 的右逆.

(3) = (1) + (2)

※ 对可逆映射 $f, f^{-1}[B]$ 无论看作 B 在 f^{-1} 下的像还是 B 在 f 下的原像都是一致的.

※ 函数的逆映射称为反函数.

□ Def. 单同态, 满同态

$f: A \rightarrow B$ 称为单同态, 若 $\forall Z \forall g_1, g_2: Z \rightarrow A (f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2)$

$f: A \rightarrow B$ 称为满同态, 若 $\forall Z \forall h_1, h_2: B \rightarrow Z (h_1 \circ f = h_2 \circ f \Rightarrow h_1 = h_2)$

• 同态与元素对应

1) $f: A \rightarrow B$ 是单射当且仅当 f 是单同态

2) $f: A \rightarrow B$ 是满射当且仅当 f 是满同态

证 1) 必要性: 若 f 是单射, 设其左逆为 f'

$$\forall Z \forall g_1, g_2: Z \rightarrow A (f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow f' \circ f \circ g_1 = f' \circ f \circ g_2$$

$$\Rightarrow \text{id}_A \circ g_1 = \text{id}_A \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2) \Rightarrow f \text{ 是单同态}$$

充分性: 若 f 是单同态, 不妨设 $Z = \{k\}$.

对任意 $x_1, x_2 \in A$, 设 $g_1(k) = x_1, g_2(k) = x_2$

于是 $f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2$

变为 $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, 即 f 是单射.

2) 必要性: 若 f 是满射, 设 f 有右逆 f'

$\forall Z \forall h_1, h_2: B \rightarrow Z (h_1 \circ f = h_2 \circ f \Rightarrow h_1 \circ f \circ f' = h_2 \circ f \circ f'$

$\Rightarrow h_1 \circ \text{id}_B = h_2 \circ \text{id}_B \Rightarrow h_1 = h_2) \Rightarrow f$ 是满同态

充分性: 若 f 不是满射, $B \setminus \text{Im } f \neq \emptyset$

不妨设 $Z = \{0, 1, 2\}$

$h_1(y) = \begin{cases} 0 & y \in \text{Im } f \\ 1 & y \in B \setminus \text{Im } f \end{cases}, h_2(y) = \begin{cases} 0 & y \in \text{Im } f \\ 2 & y \in B \setminus \text{Im } f \end{cases}$

因此有 $h_1 \circ f = h_2 \circ f \wedge h_1 \neq h_2$, 即 f 不是满同态. □

※ 将单射/满射抽象到单同态/满同态在范畴论中有更广的运用.

§1.5* 基数

□ Def. 等势, 基数

若两个集合之间存在双射, 则称它们等势.

易证等势是等价关系, 集合对应的等势等价类称为它的基数.

记为 $\text{card } A$ 或 $|A|$.

A 与 B 等势记为 $\text{card } A = \text{card } B$ 或 $|A| = |B|$.

□ 若 A 能与 B 的子集建立双射, 则记为 $\text{card } A \leq \text{card } B$.

$\text{card } A \leq \text{card } B \iff \exists C \subset B (\text{card } A = \text{card } C)$

□ Def. 偏序, 全序(线序), 良序

集合 A 上的关系 R 称为偏序关系, 若满足:

1) 自反性: $\forall a \in A (aRa)$

2) 传递性: $\forall a, b, c \in A (aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc)$

3) 反对称性: $\forall a, b \in A (aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b)$

偏序 aRb 常记为 $a \leq b$.

集合 A 上的偏序关系 $\leq$ 称为全序(线序)关系, 若满足:

完全性: $\forall a, b \in A (a \leq b \vee b \leq a)$

集合 A 上的全序关系称为良序关系, 若 A 的非空子集都有最小元

$\forall B \subset A (\exists a \in B \forall b \in B (a \leq b) \vee B = \emptyset)$.

• 要证明基数之间的关系是偏序关系, 即:

1) $\forall A \forall B \forall C (\text{card } A \leq \text{card } B \wedge \text{card } B \leq \text{card } C$

$\Rightarrow \text{card } B \leq \text{card } C)$

2) $\forall A \forall B (\text{card } A \leq \text{card } B \wedge \text{card } B \leq \text{card } A$

$\Rightarrow \text{card } A = \text{card } B)$

3) $\forall A (\text{card } A \leq \text{card } A)$

其中(1), (3)是显然的, 而(2)是较难证明的, 称为 Schröder-Bernstein 定理.

• (Schröder-Bernstein 定理) 若存在集合 A 到 B 的单射和 B 到 A 的单射, 则 A 与 B 可建立双射.

证 设 $f: A \rightarrow B$ 与 $g: B \rightarrow A$ 是单射.

显然 $f: A \rightarrow f[A]$ 是双射, 即 A 与 $f[A] \subset B$ 等势, 只要证 $f[A]$ 与 B 等势. f, g 为单射, 则 $f \circ g: B \rightarrow f[A]$ 也为单射.

因此 SB 定理等价于以下引理:

“若集合 $C \subset B$, 且存在单射 $h: B \rightarrow C$, 则 C 与 B 可建立双射.”

下面验证 $O(x)$ 是满足条件的双射:

$$O(x) = \begin{cases} h(x) & \exists n \in \mathbb{N} (x \in h^n[B] \setminus h^n[C]) \\ x & \forall n \in \mathbb{N} (x \notin h^n[B] \setminus h^n[C]) \end{cases}$$

① 构造无穷递降链:

令 $B_0 := B, C_0 := C; \forall n \in \mathbb{N} (h^n[B] = B_n, h^n[C] = C_n)$.

i) $\forall n \in \mathbb{N} (B_n \supset C_n)$:

有 $B_0 \supset C_0$.

以及 $\forall k \in \mathbb{N} (B_k \supset C_k \Rightarrow h[B_k] \supset h[C_k] \Rightarrow B_{k+1} \supset C_{k+1})$

归纳可证.

ii) $\forall n \in \mathbb{N} (B_{n+1} \subset C_n)$:

有 $B_1 = h[B_0] \subset C_0$.

以及 $\forall k \in \mathbb{N} (B_{k+1} \subset C_k \Rightarrow h[B_{k+1}] \subset h[C_k] \Rightarrow B_{k+2} \subset C_{k+1})$

归纳可证.

至此构造出无穷递减链 $B_0 \supset C_0 \supset B_1 \supset C_1 \supset \dots \supset B_n \supset C_n \supset B_{n+1} \supset \dots$

② 构造不交的洋葱圈

令 $D_n := B_n \setminus C_n (n \in \mathbb{N})$

i) 洋葱圈不交 $\forall i > j \in \mathbb{N} (D_i \cap D_j = \emptyset)$

$\forall i > j \in \mathbb{N}, D_i \cap D_j = \{x \in B \mid x \in B_i \wedge x \notin C_i \wedge x \in B_j \wedge x \notin C_j\}$

然而 $C_i \supset B_j \supset C_j \Rightarrow \forall x \in B (x \notin C_i \Rightarrow x \notin B_j)$.

于是 $D_i \cap D_j = \emptyset$

ii) 洋葱圈的像 $\forall n \in \mathbb{N} (h[D_n] = D_{n+1})$

h 为单射, 有 $D_{n+1} = B_{n+1} \setminus C_{n+1} = h[B_n] \setminus h[C_n] = h[B_n \setminus C_n] = h[D_n]$.

③ 验证 $O(x)$ 是双射

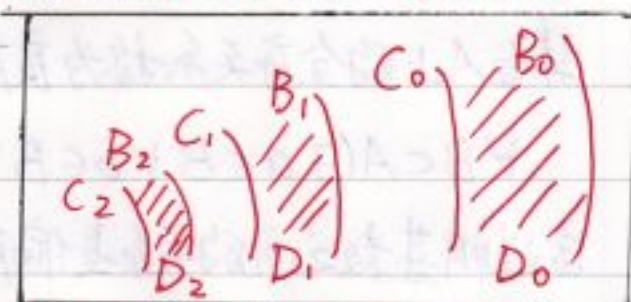
$$O(x) = \begin{cases} h(x) & \exists n \in \mathbb{N} (x \in D_n) \\ x & \forall n \in \mathbb{N} (x \notin D_n) \end{cases}$$

i) 满射: 对任意 $c \in C$

a. 若 $\exists n \in \mathbb{N}^+ (c \in D_n)$, 则 $\exists x \in D_{n-1} (O(x) = f(x) = c)$.

b. 若 $\forall n \in \mathbb{N}^+ (c \notin D_n)$, 则 $O(c) = c$.

因此 $O(x)$ 是满射.



ii) 单射. 对任意 $x_1, x_2 \in B$

a. 若 $\forall n \in \mathbb{N} (x_1, x_2 \notin D_n)$, 则 $O(x_1) = x_1, O(x_2) = x_2$

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow O(x_1) \neq O(x_2)$$

b. 若 $\exists n \in \mathbb{N} (x_1 \in D_n) \wedge \forall n \in \mathbb{N} (x_2 \notin D_n)$,

有 $O(x_1) = h(x_1) \in h[D_n] = D_{n+1}$, 而 $O(x_2) = x_2 \notin D_{n+1}$,

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow O(x_1) \neq O(x_2)$$

c. 若 $\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N} (x_1 \in D_{n_1} \wedge x_2 \in D_{n_2})$, 此时 $O(x) = h(x)$, 由 h 是单射:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow h(x_1) \neq h(x_2) \Rightarrow O(x_1) \neq O(x_2)$$

因此 $O(x)$ 是单射.

综上, 存在双射 $O(x): B \rightarrow C$, B 与 C 等势, 在原定理中即 B 与 $f[A]$ 等势

那么最终有 A 与 B 等势. $\square$

- Schröder-Bernstein 定理证明了集合的基数有偏序关系, 要证明基数有全序关系, 还需证明任意两个集合的基数是可比较的, 即:

$$\forall A \forall B (\text{card } A \leq \text{card } B \vee \text{card } B \leq \text{card } A)$$

- 对任意集合 A, B , 若不存在 A 到 B 的单射, 则必存在 B 到 A 的单射. (依赖选择公理)

证: 对任意 $X \subset B$, 映射 $f: X \rightarrow A$ 是 $B \times A$ 的子集.

设 $\Omega := \{f \mid f: X \rightarrow A \text{ 是单射} \wedge X \subset B\}$

对 $f, g \in \Omega$, $f < g$ 是 Ω 上的偏序关系.

考虑 Ω 中的每个全序子集 $C := \{f_\alpha \mid \alpha \in I \wedge C_\alpha \subset B \wedge f_\alpha: C_\alpha \rightarrow A \text{ 是单射}\}$

下面证 $S := \bigcup_{\alpha \in I} f_\alpha \in \Omega$:

注意到 $\forall f \subset B \times A (f \in \Omega \Leftrightarrow \forall (b, a) \neq (b', a') \in f$
 $(b \neq b' \wedge a' \neq a))$

$b \neq b'$ 是因为 f 是映射, $a \neq a'$ 是因为 f 是单射.

$\forall (b, a) \neq (b', a') \in S \exists \alpha, \alpha' \in I (f_\alpha < f_{\alpha'} \wedge (b, a) \in f_\alpha \wedge (b', a') \in f_{\alpha'})$

$\Rightarrow (b, a), (b', a') \in f_\alpha \in \mathcal{D} \Rightarrow b \neq b' \wedge a \neq a' \Rightarrow S \in \mathcal{D}$.

还有 $\forall f_\alpha \in C (f_\alpha \subset S)$, 即 S 是 C 的上界.

于是由 Zorn 引理, $\mathcal{D}$ 有最大元 f_m . 则 f_m 定义域为 B 或值域为 A .

(若 f_m 定义域不为 B 且值域不为 A , 则 $\exists b \in D_f, a \notin \text{Im } f (f'_m := f_m \cup \{(b, a)\} \in \mathcal{D} \Rightarrow f_m \subsetneq f'_m)$, 与 f_m 是最大元矛盾)

若 f_m 值域为 A , 则 $f_m: X \rightarrow A$ 既单又满, 则 $f_m^{-1}: A \rightarrow B$ 是单射, 与题设矛盾. 因此 f_m 定义域为 B . 存在 B 到 A 的单射. $\square$

※ Zorn 引理: 若偏序集的任意全序子集都有上界, 则该偏序集有最大元.
(等价于选择公理)

□ Def. 有限集, 无限集.

若非空集合与自己的一个真子集等势, 则该集合称为无限集;

若一个集合不是无限集, 则它称为有限集.

• 若 A 与 B 不存在双射, 而 A 与 B 的子集存在双射, 记为 $\text{card } A < \text{card } B$

$\text{card } A < \text{card } B \Leftrightarrow \text{card } A \leq \text{card } B \wedge \text{card } A \neq \text{card } B$

• (Cantor 定理) $\forall A (\text{card } A < \text{card } \mathcal{P}(A))$

证 假设存在双射 $f: A \rightarrow \mathcal{P}(A)$, 令 $B := \{x \in A \mid x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(A)$

f 是双射, 则 $\exists x \in A (f(x) = B)$ 若 $x \in B$, 则 $x \notin f(x) = B$. 矛盾;

若 $x \notin B = f(x)$, 则 $x \in B$, 矛盾.

即不存在双射 $f: A \rightarrow \mathcal{P}(A)$.

而 $f: A \rightarrow \mathcal{P}(A), x \mapsto \{x\}$ 是 A 到 $\mathcal{P}(A)$ 的单射. $\square$

※ Cantor 定理说明无限集是“多种多样”的.

关于无限集的分类详见 §2.7

§2.1 自然数

※ ZFC集合论的无穷公理把自然数集定义成最小的归纳集：

$$N = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots\}$$

一般地，自然数集由Peano公理描述：

□ Def. 自然数集 N (Peano公理)

满足以下条件的集合称为自然数集 N ：

1) 起始元 $0 \in N$

2) 后继映射 $S: N \rightarrow N$

3) 起始元不是任何元素的后继 $0 \notin S[N]$

4) S 是单射

5) 数学归纳法：

$$\forall M \subset N (0 \in M \wedge \forall n \in N (n \in M \Rightarrow S(n) \in M) \Rightarrow M = N)$$

$$\bullet \{0\} \cup S[N] = N$$

证 Peano公理(5)的直接推论

$$\bullet N = \{0, S(0), S \circ S(0), S \circ S \circ S(0), \dots\}$$

证 同上

※ 习惯上把 $S(0)$ 记作 1, $S \circ S(0)$ 记作 2, $\dots$, $S^n(0)$ 记作 n .

$$\text{有 } N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

□ Def. 自然数的加法

加法 $+$ 是映射 $N \times N \rightarrow N$, $(m, n) \mapsto m + n$, 满足：

$$1) \forall n \in N (n + 0 = n)$$

$$2) \forall m, n \in N (n + S(m) = S(n + m))$$

• 加法满足结合律：

$$\forall a, b, c \in N ((a + b) + c = a + (b + c))$$

证 固定 a, b , 对 c 用公理(5)：

$$\text{令 } M := \{c \in \mathbb{N} \mid (a+b)+c = a+(b+c)\}$$

$$(a+b)+0 = a+b = a+(b+0) \Rightarrow 0 \in M$$

$$\begin{aligned} \forall c \in M ((a+b)+S(c) &= S((a+b)+c) = S(a+(b+c)) \\ &= a+S(b+c) = a+(b+S(c)) \Rightarrow S(c) \in M \end{aligned}$$

由公理(5), $M = \mathbb{N}$. 即 $\forall a, b, c \in \mathbb{N} ((a+b)+c = a+(b+c))$. $\square$

$$\ast \forall n \in \mathbb{N} (n+1 = n+S(0) = S(n+0) = S(n))$$

[2-6]

• 加法满足交换律:

$$\forall a, b \in \mathbb{N} (a+b = b+a)$$

[2-7]

$$\text{证 令 } M_1 := \{a \in \mathbb{N} \mid a+0 = 0+a\}$$

$$0+0 = 0+0 \Rightarrow 0 \in M_1$$

$$\forall a \in M_1 (S(a)+0 = (a+1)+0 = a+(1+0) = a+1 = S(a))$$

$$\Rightarrow S(a) \in M_1$$

$$\text{即 } M_1 = \mathbb{N}; \forall a \in \mathbb{N} (a+0 = 0+a)$$

$$\text{令 } M_2 := \{b \in \mathbb{N} \mid a+b = b+a\}, 0 \in M_2$$

$$\begin{aligned} \forall b \in M_2 (a+S(b) &= a+(b+1) = (a+b)+1 = (b+a)+1 = b+(a+1) \\ &= b+(1+a) = (b+1)+a = S(b)+a \Rightarrow S(b) \in M_2 \end{aligned}$$

$$\text{即 } M_2 = \mathbb{N}; \forall a, b \in \mathbb{N} (a+b = b+a) \quad \square$$

□ Def. 自然数的序关系.

对自然数 a, b , $a \leq b$ 当且仅当 $\exists c \in \mathbb{N} (a+c = b)$.

• 自然数是良序的, 即满足以下性质

[2-8]

- 偏序
- 1) 自反性: $\forall a \in \mathbb{N} (a \leq a)$
 - 2) 反对称性: $\forall a, b \in \mathbb{N} (a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b)$
 - 3) 传递性: $\forall a, b, c \in \mathbb{N} (a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c)$

全序 4) 完全性: $\forall a, b \in \mathbb{N} (a \leq b \vee b \leq a)$

良序 5) 最小元: $\forall M \subset \mathbb{N} (\exists a \in M \forall b \in M (a \leq b)) \vee M = \emptyset$

证

$$1) \forall a \in \mathbb{N} (a+0=a \Rightarrow a \leq a)$$

$$3) \forall a, b, c \in \mathbb{N} (a \leq b \wedge b \leq c$$

$$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} (a+m=b) \wedge \exists n \in \mathbb{N} (b+n=c)$$

$$\Rightarrow \exists m, n \in \mathbb{N} (a+(m+n)=c)$$

$$\Rightarrow a \leq c)$$

$$4) \text{因 } 0 < 1 < 2 < \dots < n < n+1 < \dots$$

且 [2-4] 表明所有自然数都在以上链中, 所以自然数是可比较的.

$$\text{即 } \forall a, b \in \mathbb{N} (a \leq b \vee b \leq a)$$

• 加法满足消去律:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N} (a+b=a+c \Rightarrow b=c)$$

[2-9]

证 令 $M := \{a \in \mathbb{N} \mid \forall b, c \in \mathbb{N} (a+b=a+c \Rightarrow b=c)\}$

$$\forall b, c \in \mathbb{N} (b=c \Rightarrow b+0=c+0 \Rightarrow 0+b=0+c) \Rightarrow 0 \in M$$

$$\forall a \in M (\forall b, c \in \mathbb{N} (S(a)+b=S(a)+c \Rightarrow b+S(a)=c+S(a))$$

$$\Rightarrow S(b+a)=S(c+a) \Rightarrow b+a=c+a \Rightarrow a+b=a+c$$

$$\Rightarrow b=c) \Rightarrow S(a) \in M)$$

$$\text{由公理 (5), } M=\mathbb{N} \text{ 即 } \forall a, b, c \in \mathbb{N} (a+b=a+c \Rightarrow b=c).$$

[2-8] 式性质 (2) 的证明:

$$\forall a, b \in \mathbb{N} (a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow \exists c \in \mathbb{N} (a+c=b) \wedge \exists d \in \mathbb{N} (b+d=a))$$

$$\Rightarrow \exists c, d \in \mathbb{N} (a+(c+d)=a \Rightarrow c+d=0 \Rightarrow c \leq 0 \Rightarrow c=0)$$

$$\Rightarrow a+0=b \Rightarrow a=b)$$

• 第二数学归纳法

$$\forall M \subset \mathbb{N} (\forall n \in \mathbb{N} (\forall x \in \mathbb{N} (x < n \Rightarrow x \in M) \Rightarrow n \in M) \Rightarrow M = \mathbb{N})$$

证 令 $M := \{n \in \mathbb{N} \mid \forall x \in \mathbb{N} (x < n \Rightarrow x \in M)\}$

[2-10]

当 $n=0$ 时, $x < n$ 恒假, 即 $x < n \Rightarrow x \in M$ 恒真. 因此 $0 \in M$.

$$\forall n \in M (\forall x \in \mathbb{N} (x < n \Rightarrow x \in M) \Rightarrow n \in M \wedge \forall x \in \mathbb{N} (x < n \Rightarrow x \in M))$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{N} (x \leq n \Rightarrow x \in M)$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{N} (x < n+1 \Rightarrow x \in M)$$

$$\Rightarrow n+1 = S(n) \in M \text{ 由公理 (5) } M = \mathbb{N} \quad \square$$

[2-8] 式性质 (5) 的证明:

设 $M \subset \mathbb{N}$, 令 $S := \{n \in \mathbb{N} \mid \forall m \in M (n < m)\}$, 有 $M \cap S = \emptyset$.

若 M 无最小元, 只要证 $M = \emptyset$, 下面证明 S 是归纳集 ($S = \mathbb{N}$):

设 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $\forall x \in \mathbb{N} (x < n \Rightarrow x \in S)$

若 $n \notin S$, 由定义有 $\exists m \in M (m \leq n)$.

若 $m < n$, 则 $m \in S$, 这与 $M \cap S = \emptyset$ 矛盾.

若 $m = n$, 则 $\forall x \in \mathbb{N} (x < m \Rightarrow x \in S \Rightarrow x \notin M)$.

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{N} (x \in M \Rightarrow x \geq m) \Rightarrow m$ 是 M 的最小元, 矛盾.

因此 $\forall n \in \mathbb{N} (\forall x \in \mathbb{N} (x < n \Rightarrow x \in S) \Rightarrow n \in S)$

由第二数学归纳法, $S = \mathbb{N} \Rightarrow M = \emptyset$.

综上, $M = \emptyset \vee M$ 有最小元. $\square$

□ Def. 自然数的乘法

乘法: 是映射 $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $(m, n) \mapsto m \cdot n$, 满足:

$$1) \forall n \in \mathbb{N} (n \cdot 0 = 0)$$

$$2) \forall m, n \in \mathbb{N} (n \cdot (m+1) = n \cdot m + n)$$

• 乘法单位元: $\forall n \in \mathbb{N} (n \cdot 1 = n)$ [2-11]

$$\text{证 } n \cdot 1 = n \cdot (0+1) = n \cdot 0 + n = n \quad \square$$

• 乘法对加法满足分配律:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N} ((a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c) \quad [2-12]$$

证 令 $M := \{c \in \mathbb{N} \mid \forall a, b \in \mathbb{N} ((a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c)\}$

$$\forall a, b \in \mathbb{N} ((a+b) \cdot 0 = 0 = a \cdot 0 + b \cdot 0) \Rightarrow 0 \in M$$

$$\forall c \in M (\forall a, b \in \mathbb{N} ((a+b) \cdot (c+1) = (a+b) \cdot c + (a+b)))$$

$$= a \cdot c + b \cdot c + a + b = (a \cdot c + a) + (b \cdot c + b)$$

$$= a \cdot (c+1) + b \cdot (c+1) \Rightarrow c+1 = S(c) \in M$$

$$\text{由公理(5)} M=N, \forall a, b, c \in N (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad \square$$

• 乘法满足结合律

$$\forall a, b, c \in N ((a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)) \quad [2-13]$$

证 先证引理: $\forall n \in N (1 \cdot n = n)$

$$\text{令 } M_1 := \{n \in N \mid 1 \cdot n = n\}$$

$$1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow 0 \in M_1$$

$$\forall n \in M_1 (1 \cdot (n+1) = 1 \cdot n + 1 = n+1) \Rightarrow n+1 \in M_1$$

$$\Rightarrow M_1 = N \Rightarrow \forall n \in N (1 \cdot n = n)$$

$$\text{令 } M_2 := \{a \in N \mid \forall b, c \in N ((a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c))\}$$

$$\forall b, c \in N (0 \cdot (b \cdot c) = 0 = 0 \cdot c = (0 \cdot b) \cdot c) \Rightarrow 0 \in M_2$$

$$\begin{aligned} \forall a \in M_2 (\forall b, c \in N ((a+1) \cdot (b \cdot c) &= a \cdot (b \cdot c) + 1 \cdot (b \cdot c)) \\ &= (a \cdot b) \cdot c + b \cdot c = (a \cdot b + b) \cdot c = ((a+1) \cdot b) \cdot c) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a+1 = S(a) \in M_2$$

$$\Rightarrow M_2 = N \Rightarrow \forall a, b, c \in N ((a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)) \quad \square$$

• 乘法满足交换律:

$$\forall a, b \in N (a \cdot b = b \cdot a) \quad [2-14]$$

证 令 $M = \{a \in N \mid \forall b \in N (a \cdot b = b \cdot a)\}$

$$0 \cdot b = 0 = b \cdot 0 \Rightarrow 0 \in M$$

$$\forall a \in M (\forall b \in N ((a+1) \cdot b = a \cdot b + 1 \cdot b = b \cdot a + b = b \cdot (a+1)))$$

$$\Rightarrow a+1 = S(a) \in M$$

$$\text{由公理(5)} M=N \Rightarrow \forall a, b \in N (a \cdot b = b \cdot a) \quad \square$$

※ 右分配律 $\forall a, b, c \in N (a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c) \quad [2-15]$

证 [2-12] + [2-14] 的直接推论

§2.2 整数

► 整数环的构造

□ Def. 环, (有单位元的) 交换环

集合 R 称为一个环, 若 R 上有加法 $+: R \times R \rightarrow R$ 与乘法 $\cdot: R \times R \rightarrow R$ 满足: P_1 加法交换律 $\forall a, b \in R (a+b = b+a)$ P_2 加法结合律 $\forall a, b, c \in R ((a+b)+c = a+(b+c))$ P_3 加法单位元 $\exists 0_R \in R \forall a \in R (0_R + a = a + 0_R = 0_R)$ P_4 加法逆元 $\forall a \in R \exists b \in R (a+b = b+a = 0_R)$ P_5 乘法结合律 $\forall a, b, c \in R ((a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c))$ P_6 乘法分配律 $\forall a, b, c, d \in R (a(b+c) = a \cdot b + b \cdot c$ $\wedge (b+c) \cdot d = b \cdot d + c \cdot d)$ 环 R 称为有单位元的交换环, 若还满足: P_7 乘法单位元 $\exists 1_R \in R \forall a \in R (a \cdot 1_R = 1_R \cdot a = a)$ P_8 乘法交换律 $\forall a, b \in R (a \cdot b = b \cdot a)$ ※ 由 Peano 公理构造的自然数集满足 $P_1 \sim P_3$ 和 $P_5 \sim P_8$, 但不满足 P_4 , 即自然数没有加法逆元 (相反数).□ 要构造整数环 $\mathbb{Z}$, 使得 $\mathbb{N}$ 是它的子集, 且 $\mathbb{Z}$ 满足 $P_1 \sim P_8$, 一个直观构造是: $\mathbb{Z} := \{n, -n | n \in \mathbb{N}\}$.

定义其上的加法与乘法:

$$\forall n, m \in \mathbb{Z} (n+m := \begin{cases} n+m & n, m \in \mathbb{N} \\ n-k & n \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} (m = -k) \wedge n \geq k \\ -(k-n) & n \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} (m = -k) \wedge n < k \\ m-k & m \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} (n = -k) \wedge m \geq k \\ -(k-m) & m \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} (n = -k) \wedge m < k \\ -(k+l) & \exists k \in \mathbb{N} (n = -k) \wedge \exists l \in \mathbb{N} (m = -l) \end{cases})$$

其中对 $a, b \in \mathbb{N}$ 且 $a \geq b$, 定义 $c = a - b \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{N} (a = b + c)$.

由 $\mathbb{N}$ 的序以及消去律, c 是存在且唯一的.

$$\forall n, m \in \mathbb{Z} \quad n \cdot m := \begin{cases} n \cdot m & n, m \in \mathbb{N} \\ -n \cdot k & n \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} (m = -k) \\ -m \cdot k & m \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} (n = -k) \\ k \cdot l & \exists k \in \mathbb{N} (n = -k) \wedge \exists l \in \mathbb{N} (m = -l) \end{cases}$$

可以验证这样定义的 $\mathbb{Z}$ 满足 $P_1 \sim P_8$, 是交换环.

※ 以上定义繁琐且不易推广, 下面给出 $\mathbb{Z}$ 的一个抽象构造.

容易证明这两种定义的整数环是同构的.

□ 定义 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 上的等价关系如下:

$$\forall a, b, a', b' \in \mathbb{N} \quad (a, b) \sim (a', b') \Leftrightarrow a + b' = a' + b \quad [2-16]$$

$$(1) \text{自反性: } a + b = a + b \Rightarrow (a, b) \sim (a, b)$$

$$(2) \text{对称性: } (a, b) \sim (a', b') \Rightarrow a + b' = a' + b \Rightarrow (a', b') \sim (a, b)$$

$$(3) \text{传递性: } (a, b) \sim (a', b') \wedge (a', b') \sim (a'', b'')$$

$$\Rightarrow a + b' = a' + b \wedge a' + b'' = a'' + b'$$

$$\Rightarrow a + b' + a' + b'' = a' + b + a'' + b' \Rightarrow a + b'' = a'' + b$$

$$\Rightarrow (a, b) \sim (a'', b'') \quad \square$$

※ 一般把 (a, b) 记为 $a - b$, 相应等价类记为 $[a - b]$

□ Def. 整数环 $\mathbb{Z}$

整数环定义为 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 关于 $\sim$ 的全体等价类的集合.

$$\mathbb{Z} := (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) / \sim \quad \forall a, b \in \mathbb{N} ([a - b] \in \mathbb{Z})$$

□ Def. 整数环上的加法

$$\forall a, b, a', b' \in \mathbb{N} ([a - b] + [a' - b'] := [(a + a') - (b + b')])$$

验证加法是良定义的 (涉及商集的映射都要这样做!)

$$\text{设 } [a - b] = [c - d], [a' - b'] = [c' - d']$$

$$\text{有 } a+d=b+c, a'+d'=b'+c' \Rightarrow a+a'+d+d'=b+b'+c+c'$$

$$[c-d] + [c'-d'] = [(c+c') - (d+d')] = [(a+a') - (b+b')]$$

$$= [a-b] + [a'-b']$$

□

□ Def. 整数环上的乘法

$$\forall a, b, a', b' \in \mathbb{N} ([a-b] \cdot [a'-b'] := [(aa' + bb') - (ab' + a'b)])$$

验证乘法是良定义的

$$\text{设 } [a-b] = [c-d] \Rightarrow a+d=b+c$$

$$[c-d] \cdot [a'-b'] = [a-b] \cdot [a'-b']$$

$$\Leftrightarrow [(ca' + db') - (cb' + a'd)] = [(aa' + bb') - (ab' + a'b)]$$

$$\Leftrightarrow ab' + a'b + ca' + db' = cb' + a'd + aa' + bb'$$

$$\Leftrightarrow b'(a+d) + a'(b+c) = b'(b+c) + a'(a+d) \text{ 是成立的}$$

$$[a'-b'] \cdot [c-d] = [a'-b'] \cdot [a-b] \text{ 同理可证}$$

□

• $\mathbb{Z}$ 是有单位元的交换环, 即满足性质 $P_1 \sim P_8$

[2-17]

$$\text{证 } P_1: \forall [a_1-b_1], [a_2-b_2] \in \mathbb{Z} ([a_1-b_1] + [a_2-b_2])$$

$$= [(a_1+a_2) - (b_1+b_2)] = [(a_2+a_1) - (b_2+b_1)]$$

$$= [a_2-b_2] + [a_1-b_1]$$

$$P_2: \forall [a_1-b_1], [a_2-b_2], [a_3-b_3] \in \mathbb{Z}$$

$$([a_1-b_1] + [a_2-b_2] + [a_3-b_3]) = [a_1-b_1] + [(a_2+a_3) - (b_2+b_3)]$$

$$= [(a_1+a_2+a_3) - (b_1+b_2+b_3)] = [(a_1+a_2) - (b_1+b_2)] + [a_3-b_3]$$

$$= ([a_1-b_1] + [a_2-b_2]) + [a_3-b_3]$$

P_3 : 易见 $[0-0]$ 是 $\mathbb{Z}$ 的加法单位元

$$P_4: \forall [a-b] \in \mathbb{Z} ([a-b] + [b-a] = [0-0])$$

$$\Rightarrow [a-b] \text{ 的加法逆元是 } [b-a]$$

$$P_5: \forall [a_1-b_1], [a_2-b_2], [a_3-b_3] \in \mathbb{Z}$$

$$([a_1-b_1] [a_2-b_2] [a_3-b_3]) = [a_1-b_1] \cdot [(a_2a_3 + b_2b_3) - (a_2b_3 + a_3b_2)]$$

$$\begin{aligned}
&= [a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 b_3 + a_2 b_3 b_1 + a_3 b_2 b_1] - (a_1 a_2 b_3 + a_1 a_3 b_2 + a_2 a_3 b_1 + b_1 b_2 b_3) \\
&= [(a_1 a_2 + b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1)] \cdot [a_3 - b_3] \\
&= ([a_1 - b_1] \cdot [a_2 - b_2]) \cdot [a_3 - b_3]
\end{aligned}$$

$$P_6: \forall [a-b], [c_1-d_1], [c_2-d_2] \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned}
&([a-b] \cdot ([c_1-d_1] + [c_2-d_2]) = [a-b] \cdot [(c_1+c_2) - (d_1+d_2)]) \\
&= [(ac_1+ac_2+bd_1+bd_2) - (bc_1+bc_2+ad_1+ad_2)] \\
&= [(ac_1+bd_1) - (bc_1+ad_1)] + [(ac_2+bd_2) - (bc_2+ad_2)] \\
&= [a-b] \cdot [c_1-d_1] + [a-b] \cdot [c_2-d_2]
\end{aligned}$$

左分配律同理

P_7 : 易见 $[1-0]$ 是乘法单位元

$$P_8: \forall [a_1-b_1], [a_2-b_2] \in \mathbb{Z} \quad ([a_1-b_1] \cdot [a_2-b_2])$$

$$\begin{aligned}
&= [(a_1 a_2 + b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1)] = [(a_2 a_1 + b_2 b_1) - (a_2 b_1 + a_1 b_2)] \\
&= [a_2 - b_2] \cdot [a_1 - b_1]
\end{aligned}$$

□ Def. 整数环上的序关系:

对整数 $[a, b], [a', b']$, 有 $[a, b] \leq [a', b'] \iff a + b' \leq a' + b$

※ 与自然数相似, 整数环也借加法定义序关系.

不难证明以上定义的序是整数环上的全序 (但不是良序!)

□ Def. 相反数, 减法

任意整数 $[a, b]$ 的加法逆元称为相反数, 记为 $-[b, a]$.

$$\begin{aligned}
\forall [a-b], [a'-b'] \in \mathbb{Z} \quad ([a-b] - [a'-b'] &:= [a-b] + (-[a'-b']) \\
&= [a-b] + [b'-a'])
\end{aligned}$$

$$- \forall [a-b], [a'-b'] \in \mathbb{Z} \quad ([a-b] \leq [a'-b'] \iff [a'-b'] - [a-b] \geq [0, 0])$$

• 记 $\tilde{\mathbb{N}} = \{[n-0] \in \mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{N}\}$, 则 $\mathbb{N}$ 与 $\tilde{\mathbb{N}}$ 同构.

即存在双射 $\sigma: \tilde{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$, 满足:

$$1) \forall a, b \in \tilde{\mathbb{N}} \quad (\sigma(a+b) = \sigma(a) + \sigma(b))$$

$$2) \forall a, b \in \tilde{N} (\sigma(a \cdot b) = \sigma(a) \cdot \sigma(b))$$

$$3) \forall a, b \in \tilde{N} (a \leq_z b \Leftrightarrow \sigma(a) \leq_N \sigma(b))$$

这说明自然数集 N 可视为整数集 Z 的子集. $N \cong \tilde{N} \subset Z$. [2-18]

证 $\forall n \in N (\sigma([n-0]) := n)$

$$1) \sigma([a-0] + [b-0]) = \sigma([(a+b)-0]) = a+b \\ = \sigma([a-0]) + \sigma([b-0])$$

$$2) \sigma([a-0] \cdot [b-0]) = \sigma([(a \cdot b)-0]) = a \cdot b \\ = \sigma([a-0]) \cdot \sigma([b-0])$$

$$3) [a-0] \leq_z [b-0] \Leftrightarrow a+0 \leq_N b+0 \Leftrightarrow a \leq_N b \quad \square$$

• 整数集可表示为 $Z = \{[n, 0], [0, n] \mid n \in N\}$.

把 $[n, 0]$ 记为 n , $[0, n]$ 记为 $-n$, 则有:

$$Z = \{n, -n \mid n \in N\} \quad (0 = -0), \text{ 与第一个定义相合.}$$

• 序与加法 & 乘法的关系

$$P_{10}: \forall x, y, z \in Z (x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z)$$

$$P_{11}: \forall x, y \in Z (x \geq 0 \wedge y \geq 0 \Rightarrow x \cdot y \geq 0)$$

※ 性质 $P_1 \sim P_8$ 与 $P_{10} \sim P_{11}$ 表明 Z 是序环.

2.3 有理数

► 有理数域的构造

□ Def. 域, 序域

集合 F 称为一个域, 若 F 上有加法与乘法满足 (§2.2 的) $P_1 \sim P_8$

以及: P_9 乘法逆元 $\forall a \in F \setminus 0_F \exists b \in F \setminus 0_F (a \cdot b = 1_F)$

域 F 称为序域, 若 F 上定义了全序关系, 并满足 (§2.2 的) $P_{10} \sim P_{11}$

※ 整数环 Z 是序环, 但整数没有乘法逆元 (倒数)

要构造有理数域 Q 成为序域, 使得 Z 是它的子集.

□ 定义 $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ 上的等价关系如下:

$$\forall a, a' \in \mathbb{Z} \forall b, b' \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} ((a, b) \sim (a', b') \iff ab' = a'b) \quad [2-19]$$

1) 自反性: $ab = ab \Rightarrow (a, b) \sim (a, b)$

2) 对称性: $(a, b) \sim (a', b') \Rightarrow ab' = a'b \Rightarrow (a', b') \sim (a, b)$

3) 传递性: $(a, b) \sim (a', b') \wedge (a', b') \sim (a'', b'')$

$$\Rightarrow ab' = a'b \wedge a'b'' = a''b' \Rightarrow ab'a'b'' = a'ba''b'$$

$$\Rightarrow ab'' = a''b \Rightarrow (a, b) \sim (a'', b'') \quad \square$$

※ 把 (a, b) 记作 a/b , 相应等价类记作 $[a/b]$

□ Def. 有理数域 $\mathbb{Q}$

有理数域定义为 $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ 关于 $\sim$ 的全体等价类的集合

$$\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})) / \sim \quad \forall a \in \mathbb{Z} \forall b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} ([a/b] \in \mathbb{Q})$$

□ Def. $\mathbb{Q}$ 上的加法 & 乘法

$$\forall a, a' \in \mathbb{Z} \forall b, b' \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} ([a/b] + [a'/b'] := [(ab' + a'b)/bb'])$$

$$\forall a, a' \in \mathbb{Z} \forall b, b' \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} ([a/b] \cdot [a'/b'] := [aa'/bb'])$$

验证加法良定义:

$$\text{设 } [a/b] = [c/d], [a'/b'] = [c'/d']$$

$$\text{有 } ad = bc, a'd' = b'c'$$

$$\Rightarrow [a/b] + [a'/b'] = [(ab' + a'b)/bb']$$

$$[c/d] + [c'/d'] = [(cd' + c'd)/dd']$$

$$[(ab' + a'b)/bb'] = [(cd' + c'd)/dd'] \iff$$

$$(ab' + a'b)dd' = (cd' + c'd)bb' \iff ad = bc \wedge a'd' = b'c'$$

$$\text{于是 } [a/b] + [a'/b'] = [c/d] + [c'/d']$$

验证乘法良定义:

$$\text{设 } [a/b] = [c/d], [a'/b'] = [c'/d'] \Rightarrow ad = bc \wedge a'd' = b'c'$$

$$[a/b] \cdot [a'/b'] = [aa'/bb'], [c/d] \cdot [c'/d'] = [cc'/dd']$$

$$[a/b] \cdot [a'/b'] = [c/d] \cdot [c'/d'] \Leftrightarrow [aa'/bb'] = [cc'/dd']$$

$$\Leftrightarrow aa'dd' = bb'cc' \Leftrightarrow ad = bc \wedge a'd' = b'c'$$

□

□ Def. $\mathbb{Q}$ 上的序关系

对有理数 $[a/b], [a'/b']$ ($b, b' \neq 0$), 有:

$$[a/b] \leq [a'/b'] \Leftrightarrow [a/b] - [a'/b'] \leq 0_{\mathbb{Q}} \Leftrightarrow (ab' - a'b)bb' \leq 0_{\mathbb{Z}}$$

这是 $\mathbb{Q}$ 上的全序关系.

[2-20]

1) 自反性: $0 = (ab - ab)b^2 \Rightarrow [a/b] \leq [a/b]$

2) 传递性: $[a_1/b_1] \leq [a_2/b_2] \wedge [a_2/b_2] \leq [a_3/b_3]$

$$\Rightarrow (a_1b_2 - a_2b_1)b_1b_2 \leq 0 \wedge (a_2b_3 - a_3b_2)b_2b_3 \leq 0$$

$$\Rightarrow b_1b_2^2b_3 [(a_1b_2 - a_2b_1)b_2b_3 + (a_2b_3 - a_3b_2)b_1b_2]$$

$$= (b_2b_3)^2 (a_1b_2 - a_2b_1)b_1b_2 + (b_1b_2)^2 (a_2b_3 - a_3b_2)b_2b_3 \leq 0$$

$$\Rightarrow b_1b_2^2b_3 (a_1b_2^2b_3 - a_3b_1b_2^2) \leq 0$$

$$\Rightarrow b_2^4b_1b_3 (a_1b_3 - a_3b_1) \leq 0 \Rightarrow b_1b_3 (a_1b_3 - a_3b_1) \leq 0$$

$$\Rightarrow [a_1/b_1] \leq [a_3/b_3]$$

3) 反对称性: $[a_1/b_1] \leq [a_2/b_2] \wedge [a_2/b_2] \leq [a_1/b_1]$

$$\Rightarrow (a_1b_2 - a_2b_1)b_1b_2 \leq 0 \wedge (a_2b_1 - a_1b_2)b_1b_2 \leq 0$$

$$\Rightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \Rightarrow a_1b_2 = a_2b_1 \Rightarrow [a_1/b_1] = [a_2/b_2]$$

4) 完全性: $a_1b_2 \leq a_2b_1 \vee a_2b_1 \leq a_1b_2$

$$\Rightarrow (a_1b_2 - a_2b_1)b_1b_2 \leq 0 \vee (a_2b_1 - a_1b_2)b_1b_2 \leq 0$$

$$\Rightarrow [a_1/b_1] \leq [a_2/b_2] \vee [a_2/b_2] \leq [a_1/b_1]$$

□

• $\mathbb{Q}$ 是序域, 即满足性质 $P_1 \sim P_{11}$.

[2-21]

证 P_1 加法交换律: $[a_1/b_1] + [a_2/b_2] = [(a_1b_2 + a_2b_1)/b_1b_2]$

$$= [a_2/b_2] + [a_1/b_1]$$

P_2 加法结合律: $[a_1/b_1] + ([a_2/b_2] + [a_3/b_3])$

$$= [a_1/b_1] + [(a_2b_3 + a_3b_2)/b_2b_3]$$

$$= [(b_1(a_2b_3 + a_3b_2) + a_1b_2b_3) / b_1b_2b_3]$$

$$= [(b_3(a_1b_2 + a_2b_1) + a_3b_1b_2) / b_1b_2b_3]$$

$$= [(a_1b_2 + a_2b_1) / b_1b_2] + [a_3/b_3] = ([a_1/b_1] + [a_2/b_2]) + [a_3/b_3]$$

$$P_3 \text{ 零元 } 0_Q = [0/b]$$

$$P_4 \text{ 加法逆元 (相反数) } -[a/b] = [(-a)/b] = [a/(-b)]$$

$$P_5 \text{ 乘法结合律 } [a_1/b_1] \cdot [a_2/b_2] \cdot [a_3/b_3]$$

$$= [a_1/b_1] \cdot [a_2a_3/b_2b_3] = [a_1a_2a_3/b_1b_2b_3] = [a_1a_2/b_1b_2] \cdot [a_3/b_3]$$

$$= ([a_1/b_1] \cdot [a_2/b_2]) \cdot [a_3/b_3]$$

$$P_6 \text{ 乘法分配律 } [a/b] \cdot ([c_1/d_1] + [c_2/d_2])$$

$$= [a/b] \cdot [(c_1d_2 + c_2d_1)/d_1d_2] = [a(c_1d_2 + c_2d_1)/bd_1d_2]$$

$$= [(ac_1 \cdot bd_2 + ac_2 \cdot bd_1)/bd_1 \cdot bd_2] = [ac_1/bd_1] + [ac_2 \cdot bd_2]$$

$$= [a/b] \cdot [c_1/d_1] + [a/b] \cdot [c_2/d_2]$$

$$P_7 \text{ 单位元 } 1_Q = [1/1]$$

$$P_8 \text{ 乘法交换律 } [a_1/b_1] \cdot [a_2/b_2] = [a_1a_2/b_1b_2] = [a_2/b_2] \cdot [a_1/b_1]$$

$$P_9 \text{ 乘法逆元 } [a/b]^{-1} = [b/a] \quad (a, b \neq 0)$$

$$P_{10} \text{ 序与加法 由定义显然}$$

$$P_{11} \text{ 序与乘法 } \forall a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} ([a/b] \leq 0_Q \iff ab \leq 0_{\mathbb{Z}}).$$

$$[a/b] \geq 0 \wedge [c/d] \geq 0 \implies ab \geq 0 \wedge cd \geq 0 \implies ac \cdot bd \geq 0$$

$$\implies [a/b] \cdot [c/d] = [ac/bd] \geq 0$$

□

• $\mathbb{Q}$ 有子集 $\tilde{\mathbb{Z}} = \{[n/1] \in \mathbb{Q} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ 与 $\mathbb{Z}$ 同构

[2-22]

$$\text{同构映射 } \sigma: \tilde{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{Z}, [n/1] \mapsto n$$

※ 这表明整数环 $\mathbb{Z}$ 可视为有理数域 $\mathbb{Q}$ 的子环.

□ Def. 倒数, 除法

任意非零有理数 $[a/b]$ 的乘法逆元称为倒数, $[a/b]^{-1} = [b/a]$

$$\forall a \in \mathbb{Z}, b, c, d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} ([a/b] / [c/d] := [a/b] \cdot [c/d]^{-1})$$

$$= [a/b] \cdot [d/c] = [ad/bc])$$

* 定义除法后, 有理数 $[a/b]$ 就可以写作 $\frac{a}{b}$ 或 a/b .

• 有理数域是最小的序域, 即任意序域都有与 $\mathbb{Q}$ 同构的子域.

对任意序域 F , 存在单射 $\sigma: \mathbb{Q} \rightarrow F$, 满足:

$$1) \forall a, b \in \mathbb{Q} (\sigma(a+b) = \sigma(a) + \sigma(b))$$

$$2) \forall a, b \in \mathbb{Q} (\sigma(a \cdot b) = \sigma(a) \cdot \sigma(b))$$

$$3) \forall a, b \in \mathbb{Q} (a \leq b \Leftrightarrow \sigma(a) \leq_F \sigma(b)) \quad [2-23]$$

证 构造 σ 如下:

$$\text{定义: } \sigma(0) := 0_F$$

$$\forall m \in \mathbb{N} (\sigma(m) := \underbrace{1_F + \dots + 1_F}_{m \uparrow})$$

$$\forall m \in \mathbb{N} (\sigma(-m) := -\underbrace{1_F - \dots - 1_F}_{m \uparrow})$$

$$\text{显然 } \forall m, n \in \mathbb{Z} (\sigma(m+n) = \sigma(m) + \sigma(n), \sigma(mn) = \sigma(m) \cdot \sigma(n))$$

$$\text{定义: } \forall m \in \mathbb{Z} (\sigma(1/m) := \sigma(m)^{-1} = 1/\sigma(m))$$

$$\forall r = m/n \in \mathbb{Q} (\sigma(m/n) := \sigma(m) \cdot \sigma(1/n) = \sigma(m)/\sigma(n))$$

这里要验证 σ 是良定义的:

$$m/n = km/kn, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\begin{aligned} \sigma(km/kn) &= \sigma(km) \cdot \sigma(1/kn) = \sigma(k) \cdot \sigma(m) \cdot \sigma(1/k) \cdot \sigma(1/n) \\ &= \sigma(m) \cdot \sigma(1/n) = \sigma(m/n) \end{aligned}$$

验证 (1) ~ (3):

$$\text{设 } r = \frac{m}{n}, s = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

$$\sigma(r \cdot s) = \sigma\left(\frac{mp}{nq}\right) = \sigma(m) \cdot \sigma(p) \cdot \sigma(1/n) \cdot \sigma(1/q)$$

$$= \sigma\left(\frac{m}{n}\right) \cdot \sigma\left(\frac{p}{q}\right) = \sigma(r) \cdot \sigma(s)$$

$$\sigma(r+s) = \sigma\left(\frac{mq+np}{nq}\right) = \sigma(mq+np) \cdot \sigma(1/nq)$$

$$= \underbrace{\sigma(1/nq) + \dots + \sigma(1/nq)}_{mq+np \uparrow}$$

$$= \sigma(mq) \cdot \sigma(1/nq) + \sigma(np) \cdot \sigma(1/nq)$$

$$= \sigma(m/n) + \sigma(p/q) = \sigma(r) + \sigma(s)$$

为证 σ 保序, 先证 σ 保号:

$$\sigma(1) = 1_F >_F 0_F, \sigma(n+1) = \sigma(n) + \sigma(1) >_F \sigma(n)$$

$$\text{归纳得 } \forall n \in \mathbb{N} (\sigma(n) \geq_F 0_F)$$

$$\text{且有 } \forall n \in \mathbb{N} (\sigma(1/n) \cdot \sigma(n) = 1_F \Rightarrow \sigma(1/n) \geq_F 0_F)$$

$$\Rightarrow \forall m, n \in \mathbb{N} (\sigma(m/n) \geq_F 0_F) \Rightarrow \forall r \in \mathbb{Q}_+ \cup \{0\} (\sigma(r) \geq_F 0_F)$$

$$\forall r, s \in \mathbb{Q} (r \leq s \Leftrightarrow s - r \geq 0 \Leftrightarrow \sigma(s - r) \geq_F 0_F)$$

$$\Leftrightarrow \sigma(s) - \sigma(r) \geq_F 0_F \Leftrightarrow \sigma(r) \leq \sigma(s)$$

最后证 σ 是单射:

$$\forall r, s \in \mathbb{Q} (\sigma(r) = \sigma(s) \Rightarrow \sigma(r - s) = 0_F \Rightarrow r - s = 0 \Rightarrow r = s) \quad \square$$

有理数域的性质

有理数域的稠密性: $\forall x, y \in \mathbb{Q} (x < y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{Q} (x < z < y))$ [2-24]

证 $z := \frac{1}{2}(x + y) \in \mathbb{Q}$

$$\frac{1}{2} > 0 \wedge y - x > 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(y - x) > 0 \Rightarrow \frac{x}{2} < \frac{y}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{x}{2} < \frac{y}{2} + \frac{x}{2} \Rightarrow x < z$$

$$\text{另一边 } \frac{x}{2} < \frac{y}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{2} < \frac{y}{2} + \frac{y}{2} \Rightarrow z < y \quad \square$$

有理数域的 Archimedes 性: $\forall x, y \in \mathbb{Q}_+ \exists n \in \mathbb{N} (nx > y)$ [2-25]

证 设 $x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{d} (a, b, c, d \in \mathbb{N}^*)$

$x > y$ 时显然; $x < y$ 时, 取 $n = bc + 1$

$$a \geq 1 \wedge d \geq 1 \Rightarrow ad \geq 1 \Rightarrow ad \cdot (bc + 1) > bc$$

$$\Rightarrow nad > bc \Rightarrow n \cdot \frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Rightarrow nx > y \quad \square$$

※ $\mathbb{Q}$ 是 Archimedean 序域.

有理数域的不完备性

例 (有理数开方未必是有理数) $\neg \exists x \in \mathbb{Q} (x^2 = 2)$

[2-26]

证

假设 $\exists x \in \mathbb{Q} (x^2 = 2)$ 不妨设 $x > 0$ (若 $x < 0$, 也有 $-x > 0$ 满足 $(-x)^2 = x^2 = 2$)设 $x = p/q$, 其中 $p, q > 0$ 且互素

$$x^2 = 2 \Rightarrow \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow 2 \mid p^2 \Rightarrow 2 \mid p \Rightarrow 4 \mid p^2 \\ \Rightarrow 4 \mid 2q^2 \Rightarrow 2 \mid q^2 \Rightarrow 2 \mid q \Rightarrow \gcd(p, q) \geq 2. \text{ 矛盾. } \square$$

例

(Cauchy 列不收敛) $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \notin \mathbb{Q}$ [2-27]

证

假设 $e \in \mathbb{Q}$. $\exists p, q \in \mathbb{N}^* (e = \frac{p}{q})$ 显然 $q!e$ 与 $q! \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!}$ 都是整数, 于是 $\mathbb{Z} \ni q!e - q! \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} \geq 1$

$$\text{而 } q!e - q! \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} = q! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - q! \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} = q! \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$= \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \cdots$$

$$= \frac{1}{q+1} \left(1 + \frac{1}{q+2} + \frac{1}{(q+2)(q+3)} + \cdots \right)$$

$$< \frac{1}{q+1} \left(1 + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \cdots \right) = \frac{1}{q+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^n}$$

$$= \frac{1}{q+1} \cdot \frac{q+1}{q} = \frac{1}{q} < 1 \text{ 矛盾. 即 } e \notin \mathbb{Q} \quad \square$$

例

(上有界子集无上确界) 设 $A = \{x \in \mathbb{Q}_+ \mid x^2 < 2\}$, 则 $\mathbb{Q}_+ \setminus A$ 无最小元.

[2-28]

证

假设 $\mathbb{Q}_+ \setminus A$ 有最小元 q , $q^2 > 2$

$$\text{令 } p := q - \frac{q^2 - 2}{q + 2} = \frac{2q + 2}{q + 2} < q$$

$$p^2 - 2 = \left(\frac{2q + 2}{q + 2}\right)^2 - 2 = \frac{2(q^2 - 2)}{(q + 2)^2} > 0 \Rightarrow p^2 > 2$$

$$\Rightarrow p \in \mathbb{Q}_+ \setminus A \wedge p < q \text{ 矛盾. } \mathbb{Q}_+ \setminus A \text{ 无最小元. } \square$$

§2.4 实数的构造与表示

► Dedekind 分割

□ Def. 上界, 下界, 有界

设 S 是一个全序集, $M \subset S$. 若 $\exists s \in S \forall x \in M (s \geq x / s \leq x)$,则称 M 上/下有界, s 称为 M 的一个上/下界.

同时有上界和下界的集合称为有界的.

□ Def. 上确界, 下确界

设 S 是一个全序集, $M \subset S$ 上/下有界. 设 M 的全体上/下界集合为 A .

若 A 有最小/大元 s , 则称 s 为 M 的上/下确界.

记为 $s = \sup M / \inf M$.

※ 上节已证明有理数域 $\mathbb{Q}$ 不完备, 上有界子集未必有上确界. 因此需要构造实数域 $\mathbb{R}$, 使之完备化. 构造方法之一即 Dedekind 分割.

□ Def. 分割

$\mathbb{Q}$ 的非空真子集 α 称为一个分割, 若满足:

$$1) \forall r \in \alpha \forall s \in \mathbb{Q} (s < r \Rightarrow s \in \alpha)$$

$$2) \forall r \in \alpha \exists s \in \alpha (s > r)$$

例 $\alpha = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0 \vee x^2 < 2\}$ 是一个分割.

□ Def. 实数域 $\mathbb{R}$

$\mathbb{Q}$ 上全体分割的集合称为实数域 $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R} \subset \mathcal{P}(\mathbb{Q})$), 每个分割都是一个实数.

□ Def. $\mathbb{R}$ 上的全序关系.

对 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 有 $\alpha \leq_{\mathbb{R}} \beta \iff \alpha \subset \beta$.

[2-29]

1) 自反性: 显然 $\alpha \subset \alpha$

2) 反对称性 3) 传递性 显然.

4) 完全性: $\alpha, \beta \neq \emptyset \Rightarrow \alpha \setminus \beta \neq \emptyset \vee \beta \setminus \alpha \neq \emptyset$

若 $\alpha \setminus \beta \neq \emptyset$, 则 $\exists s \in \alpha (s \notin \beta)$.

$\Rightarrow \exists s \in \alpha \forall r \in \beta (s > r \Rightarrow r \in \alpha) \Rightarrow \beta \subset \alpha \Rightarrow \beta \leq_{\mathbb{R}} \alpha$

若 $\beta \setminus \alpha \neq \emptyset$, 同理有 $\alpha \leq_{\mathbb{R}} \beta$.

因此 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} (\alpha \leq_{\mathbb{R}} \beta \vee \beta \leq_{\mathbb{R}} \alpha)$

□

• (上确界原理/Dedekind 完备性) $\mathbb{R}$ 的上有界子集必有上确界.

[2-30]

证 设 $M \subset \mathbb{R}$ 有上界 α . 即 $\forall \beta \in M (\beta < \alpha)$.

令 $\gamma := \bigcup_{\beta \in M} \beta$. 下面证 γ 就是 M 的上确界:

i) $\gamma \in \mathbb{R}$:

i) $\beta \neq \emptyset \Rightarrow \gamma \neq \emptyset$; $\gamma \neq \mathbb{Q}$.

ii) $\forall r \in \gamma \exists \beta \in M (r \in \beta \Rightarrow \forall s \in \mathbb{Q} (s < r \Rightarrow s \in \beta))$

$\Rightarrow \forall r \in \gamma \forall s \in \mathbb{Q} (s < r \Rightarrow s \in \gamma)$

iii) $\forall r \in \gamma \exists \beta \in M (r \in \beta \Rightarrow \exists s \in \beta (s > r))$

$\Rightarrow \forall r \in \gamma \exists s \in \gamma (s > r)$

2) γ 是上界: $\forall \beta \in M (\beta \subset \gamma)$

3) γ 是上确界: 对 M 的任意上界 α' :

$\forall \beta \in M (\beta \subset \alpha') \Rightarrow \gamma = \bigcup_{\beta \in M} \beta \subset \alpha'$

即 $\gamma = \sup M$.

□ Def. $\mathbb{R}$ 上的加法

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} (\alpha + \beta := \{r + s \mid r \in \alpha, s \in \beta\})$

这里要验证 $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$ 是一个分割

设 $p \in \alpha + \beta$, $p = r + s$ ($r \in \alpha, s \in \beta$)

i) $\forall q \in \mathbb{Q} (q < p \Rightarrow q - s < p - s = r) \Rightarrow q - s \in \alpha$
 $\Rightarrow q = (q - s) + s \in \alpha + \beta$.

ii) $\exists t \in \alpha (t > r \Rightarrow t + s > r + s = p)$

$\Rightarrow \exists t + s \in \alpha + \beta (t + s > p)$.

□

• $\mathbb{R}$ 上的加法满足 $P_1 \sim P_4$ 以及 P_{10} .

[2-31]

证 P_1 加法交换律 $\alpha + \beta = \{r + s \mid r \in \alpha, s \in \beta\}$

$= \{s + r \mid s \in \beta, r \in \alpha\} = \beta + \alpha$.

P_2 加法结合律 $\alpha + (\beta + \gamma) = \alpha + \{s + t \mid s \in \beta, t \in \gamma\}$

$= \{r + s + t \mid r \in \alpha, s \in \beta, t \in \gamma\} = \{r + s \mid r \in \alpha, s \in \beta\} + \gamma$.

$= (\alpha + \beta) + \gamma$

P₃ 零元 $0_{\mathbb{R}} := \mathbb{Q}$ - 全体负有理数的集合.

对 $\alpha \in \mathbb{R}$, $\forall r \in \alpha$, $s \in 0_{\mathbb{R}}$ ($r+s < r \Rightarrow r+s \in \alpha$) $\Rightarrow \alpha + 0_{\mathbb{R}} \subset \alpha$

$\forall r \in \alpha \exists s \in \alpha$ ($s > r \Rightarrow r-s \in 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow r = (r-s) + s \in \alpha + 0_{\mathbb{R}}$)

$\Rightarrow \alpha \subset \alpha + 0_{\mathbb{R}}$. 即 $\forall \alpha \in \mathbb{R} (\alpha + 0_{\mathbb{R}} = \alpha)$.

P₄ 加法逆元 对 $\alpha \in \mathbb{R}$, 令 $\beta := \{p \in \mathbb{Q} \mid \exists r \in \mathbb{Q}_+ (-p-r \notin \alpha)\}$

要证 $\beta \in \mathbb{R}$ 以及 $\alpha + \beta = 0_{\mathbb{R}}$:

1) $\alpha \neq \emptyset \Rightarrow \beta \neq \mathbb{Q}$; $\alpha \neq \mathbb{Q} \Rightarrow \beta \neq \emptyset$

2) 取 $p \in \beta$. 由定义 $\exists r \in \mathbb{Q}_+ (-p-r \notin \alpha)$

$\forall q \in \mathbb{Q} (q < p \Rightarrow -p-r < -q-r \Rightarrow -q-r \notin \alpha \Rightarrow q \in \beta)$.

也即 $\forall p \in \beta \forall q \in \mathbb{Q} (q < p \Rightarrow q \in \beta)$.

3) 取 $p \in \beta$, 令 $q = p + \frac{r}{2} > p$ ($r \in \mathbb{Q}_+$)

$\exists r \in \mathbb{Q}_+ (-p-r) \notin \alpha \Rightarrow -q - \frac{r}{2} \notin \alpha \Rightarrow q \in \beta$.

也即 $\forall p \in \beta \exists q \in \beta (q > p)$.

这就证明了 β 是一个分割, $\beta \in \mathbb{R}$

1) $\forall p \in \alpha, q \in \beta$ ($\exists r \in \mathbb{Q}_+ (-q-r \notin \alpha \Rightarrow -q > -q-r \notin \alpha$)

$\Rightarrow -q > p \Rightarrow p+q < 0$) $\Rightarrow \alpha + \beta \subset 0_{\mathbb{R}}$.

2) 取 $r \in 0_{\mathbb{R}}$, $s := -\frac{r}{2} > 0$.

由 $\mathbb{Q}$ 的 Archimedes 性推论, $\exists n \in \mathbb{Z} (ns \in \alpha \wedge (n+1)s \notin \alpha)$

令 $p := -(n+2)s = \frac{n+2}{2} r$

$-p-s = 2s > 0 \Rightarrow p \in \beta$

$\Rightarrow r = ns + p$, 其中 $ns \in \alpha, p \in \beta \Rightarrow 0_{\mathbb{R}} \subset \alpha + \beta$

这就证明了 $\alpha + \beta = 0_{\mathbb{R}}$, α 的负元 β 记为 $-\alpha$.

P₁₀ 序与加法 $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} (\alpha \leq_{\mathbb{R}} \beta \Rightarrow \alpha \subset \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \subset \beta + \gamma$

$\Rightarrow \alpha + \gamma \leq_{\mathbb{R}} \beta + \gamma)$. □

※ $\mathbb{R}$ 上定义乘法要比加法复杂得多, 为化简讨论先考虑大于零的实数.

Def. $\mathbb{R}_+$ 上的乘法

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+ (\alpha \cdot \beta := \{p \in \mathbb{Q} \mid \exists r \in \alpha, s \in \beta (r, s \in \mathbb{Q}_+ \wedge p \leq r \cdot s)\})$$

(也即 $\alpha \cdot \beta$ 的元素小于等于 α, β 中正有理数的乘积的组合)

易见 $\alpha \cdot \beta$ 是一个分割, $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R}_+$ 上的乘法满足 $P_5 \sim P_9$ 以及 P_{11}

[2-32]

证 P_5, P_6, P_8 (结合律, 分配律, 交换律) 是显然的.

P_{11} 序与乘法 对 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \cdot \beta$ 至少包含一个大于零的有理数

$$\text{即 } \alpha \cdot \beta \supset 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow \alpha \cdot \beta \geq 0_{\mathbb{R}}$$

P_7 乘法单位元 $1_{\mathbb{R}} := \{r \in \mathbb{Q} \mid r < 1\}$, 易见 $1_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}$.

对 $\alpha \in \mathbb{R}_+$, 要证 $\alpha \cdot 1_{\mathbb{R}} = \alpha$

$$1) \text{ 由 } 1_{\mathbb{R}} \text{ 定义 } \forall p \in \alpha, q \in 1_{\mathbb{R}} (p \cdot q < p \Rightarrow p \cdot q \in \alpha)$$

$$\Rightarrow \alpha \cdot 1_{\mathbb{R}} \subset \alpha$$

$$2) \forall p \in \alpha \exists q \in \alpha (q > p \Rightarrow \frac{p}{q} < 1 \Rightarrow \frac{p}{q} \in 1_{\mathbb{R}} \Rightarrow p = q \cdot \frac{p}{q}$$

$$\Rightarrow p \in \alpha \cdot 1_{\mathbb{R}}) \Rightarrow \alpha \subset \alpha \cdot 1_{\mathbb{R}}$$

P_8 乘法逆元 对 $\alpha \in \mathbb{R}_+$

$$\text{令 } \beta := \{p \in \mathbb{Q} \mid \exists q \in \mathbb{Q}_+ (\exists r \in \mathbb{Q}_+ (\frac{1}{q} - r \notin \alpha) \wedge p \leq q)\}$$

证 $\beta \in \mathbb{R}$:

$$1) \text{ 显然 } \beta \neq \emptyset; \forall \frac{1}{q} \in \alpha \neg \exists r \in \mathbb{Q}_+ (\frac{1}{q} - r \notin \alpha) \Rightarrow \beta \neq \mathbb{Q}$$

$$2) \forall p \in \beta (p - 1 < p \Rightarrow p - 1 \in \beta)$$

$$3) \text{ 对 } p \in \beta \text{ 若 } p \leq 0, \text{ 显然 } \exists q \in \beta (q > p)$$

$$\text{若 } p > 0, \text{ 则 } \exists r \in \mathbb{Q}_+ (\frac{1}{p} - r \notin \alpha)$$

$$\text{取 } q = \frac{2p}{2-pr} \Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{r}{2} \Rightarrow q > p$$

$$\text{且有 } \frac{1}{q} - \frac{r}{2} = \frac{1}{p} - r \notin \alpha \Rightarrow q \in \beta$$

$$\text{也即 } \forall p \in \beta \exists q \in \beta (q > p)$$

证 $\alpha \cdot \beta = 1_{\mathbb{R}}$, 只要证它们大于零的部分相互包含:

1) 对 $p \in \alpha, q \in \beta$, 由定义 $\exists r \in \mathbb{Q}_+ (\frac{1}{q} - r \notin \alpha)$

而 $\frac{1}{q} > \frac{1}{q} - r \Rightarrow \frac{1}{q} \notin \alpha$

$p \in \alpha \wedge \frac{1}{q} \notin \alpha \Rightarrow \frac{1}{q} > p \Rightarrow p \cdot q < 1 \Rightarrow p \cdot q \in 1_{\mathbb{R}}$

$\Rightarrow \alpha \cdot \beta \subset 1_{\mathbb{R}}$

2) 取有理数 $0 < t < 1 \Rightarrow t \in 1_{\mathbb{R}}$

取 $p \in \alpha, 0 < 1-t < 1 \Rightarrow (1-t)p \in \alpha$

由有理数 Archimedes 性推论

$\exists n \in \mathbb{N}^* (np(1-t) \in \alpha \wedge (n+1)p(1-t) \notin \alpha)$

记 $p_1 = np(1-t), p_2 = (n+1)p(1-t)$

$p_2 \notin \alpha \wedge p \in \alpha \Rightarrow p_2 > p \Rightarrow p_2(1-t) > p(1-t) = p_2 - p_1$

$\Rightarrow p_2 < \frac{p_1}{t} \Rightarrow \frac{p_1}{t} \notin \alpha$ 且 $\frac{p_1}{t} - (p_1 - p_2) \notin \alpha \Rightarrow \frac{t}{p_1} \in \beta$

$t = p_1 \cdot \frac{t}{p_1} \Rightarrow t \in \alpha \cdot \beta \Rightarrow 1_{\mathbb{R}} \subset \alpha \cdot \beta$

这就证明了 $\alpha \cdot \beta = 1_{\mathbb{R}}$, α 的逆元 β 记为 $\frac{1}{\alpha}$ 或 α^{-1} . □

※ 有了 $\mathbb{R}_+$ 上的乘法, 借助零元和负元便可推广到 $\mathbb{R}$ 上的乘法.

□ Def. $\mathbb{R}$ 上的乘法

规定 $\forall \alpha \in \mathbb{R} (\alpha \cdot 0_{\mathbb{R}} := 0_{\mathbb{R}} \cdot \alpha := \alpha)$

定义 $\alpha \cdot \beta = \begin{cases} (-\alpha) \cdot (-\beta) & \alpha < 0_{\mathbb{R}}, \beta < 0_{\mathbb{R}} \\ -[\alpha \cdot (-\beta)] & \alpha > 0_{\mathbb{R}}, \beta < 0_{\mathbb{R}} \\ -[(-\alpha) \cdot \beta] & \alpha < 0_{\mathbb{R}}, \beta > 0_{\mathbb{R}} \end{cases}$

需要重新验证 $P_5 \sim P_9$, 但其过程是非常显然的, 从略

※ 至此, 我们构造出了一个完备的序域——实数域 $\mathbb{R}$, 上节已证明序域必有子域与 $\mathbb{Q}$ 同构, 现在给出这个同构:

• $\tilde{\mathbb{Q}} := \{\tilde{r} \in \mathbb{R} \mid \exists r \in \mathbb{Q} (\tilde{r} = \{s \in \mathbb{Q} \mid s < r\})\}$

$\sigma: \mathbb{Q} \rightarrow \tilde{\mathbb{Q}}, r \mapsto \tilde{r}$. 即每个有理数 r 对应有理分割 $\{s \in \mathbb{Q} \mid s < r\}$

1) $\forall r, s \in \mathbb{Q} (\sigma(r+s) = \sigma(r) + \sigma(s))$

$$2) \forall r, s \in \mathbb{Q} (\sigma(r \cdot s) = \sigma(r) \cdot \sigma(s))$$

$$3) \forall r, s \in \mathbb{Q} (r \leq s \Leftrightarrow \sigma(r) \leq_{\mathbb{R}} \sigma(s)) \quad [2-33]$$

证

$$1) \sigma(r+s) = \{p \in \mathbb{Q} / p < r+s\} = \{p+q \in \mathbb{Q} / p < r, q < s\} \\ = \{p \in \mathbb{Q} / p < r\} + \{q \in \mathbb{Q} / q < s\} = \sigma(r) + \sigma(s)$$

$$2) \text{ 设 } r, s \in \mathbb{Q}_+, \sigma(r \cdot s) = \{p \in \mathbb{Q} / p < rs\}$$

$$\forall p \in \sigma(r \cdot s) \quad (p < rs \Rightarrow \exists 0 < u < r, 0 < v < s (p < uv) \\ \Rightarrow p \in \sigma(r) \cdot \sigma(s)) \Rightarrow \sigma(r \cdot s) \subset \sigma(r) \cdot \sigma(s)$$

$$\forall p \in \sigma(r) \cdot \sigma(s) (\exists 0 < u < r, 0 < v < s (p < uv) \Rightarrow p < rs \\ \Rightarrow p \in \sigma(r \cdot s)) \Rightarrow \sigma(r) \cdot \sigma(s) \subset \sigma(r \cdot s)$$

$$\text{即 } \forall r, s \in \mathbb{Q}_+ (\sigma(r \cdot s) = \sigma(r) \cdot \sigma(s))$$

$$\text{对 } r=0 \vee s=0, \text{ 显然 } \sigma(r \cdot s) = \sigma(r) \cdot \sigma(s)$$

$$\text{对 } r \in \mathbb{Q}_+, s \in \mathbb{Q}_-, \sigma(r \cdot s) = \sigma(-(r \cdot (-s))) = -\sigma(r \cdot (-s)) \\ = -\sigma(r) \cdot \sigma(-s) = \sigma(r) \cdot \sigma(s)$$

$$\text{对 } r, s \in \mathbb{Q}_-, \sigma(r \cdot s) = \sigma((-r) \cdot (-s)) = \sigma(-r) \cdot \sigma(-s) \\ = \sigma(r) \cdot \sigma(s)$$

$$3) r < s \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{Q} (p = \frac{r+s}{2} \Rightarrow r < p < s) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{Q} (p \in \sigma(r) \wedge p \notin \sigma(s)) \Leftrightarrow \sigma(r) <_{\mathbb{R}} \sigma(s)$$

$$r = s \Leftrightarrow \sigma(r) = \sigma(s) \quad \text{显然} \quad \square$$

※ 从自然数的Peano公理开始, 我们一步步构造出了实数:

$$\mathbb{N} \xrightarrow[\text{(Peano公理)}]{\text{加法封闭}} (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) / \sim \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow[\text{除法封闭}]{(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) / \sim} \mathbb{Q} \xrightarrow[\text{Dedekind分割}]{\text{完备化}} \mathbb{R}$$

• 实数域是完备序域, 重述其性质如下 (这里重新编号了!)

$$P_1 \text{ 加法交换律 } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} (\alpha + \beta = \beta + \alpha)$$

$$P_2 \text{ 加法结合律 } \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} (\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma)$$

$$P_3 \text{ 加法单位元 (零元) } \exists 0 \in \mathbb{R} \forall \alpha \in \mathbb{R} (\alpha + 0 = \alpha)$$

P_4 加法逆元(负元) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \exists \beta \in \mathbb{R} (\alpha + \beta = 0)$

P_5 乘法交换律 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} (\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha)$

P_6 乘法结合律 $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} (\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma)$

P_7 乘法单位元(幺元) $\exists 1 \in \mathbb{R} \forall \alpha \in \mathbb{R} (\alpha \cdot 1 = \alpha)$

P_8 乘法逆元 $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists \beta \in \mathbb{R} (\alpha \cdot \beta = 1)$

P_9 乘法分配律 $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} (\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma)$

P_{10} 序的自反性 $\forall \alpha \in \mathbb{R} (\alpha \leq \alpha)$

P_{11} 序的反对称性 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} (\alpha \leq \beta \wedge \beta \leq \alpha \Rightarrow \alpha = \beta)$

P_{12} 序的传递性 $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} (\alpha \leq \beta \wedge \beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \leq \gamma)$

P_{13} 序的完全性 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} (\alpha \leq \beta \vee \beta \leq \alpha)$

P_{14} 序与加法 $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} (\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma)$

P_{15} 序与乘法 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} (\alpha \geq 0 \wedge \beta \geq 0 \Rightarrow \alpha \cdot \beta \geq 0)$

P_{16} Dedekind 完备性

$$\forall M \subset \mathbb{R} (\exists p \in \mathbb{R} \forall m \in M (m \leq p) \Rightarrow \exists s \in \mathbb{R} (s = \sup M))$$

※ $P_1 \sim P_{16}$ 构成了实数域的公理化描述. 换言之, 任意完备序域⁰ (即满足 $P_1 \sim P_{16}$) 都与实数域同构! 于是大部分分析学教材都将 $\mathbb{R}$ 定义为满足以上性质的集合.

先来俩引理:

• 实数域的 Archimedes 性: $\forall x, y \in \mathbb{R}_+ \exists n \in \mathbb{N} (nx > y)$. [2-34]

证 假设没有这样的 $n \in \mathbb{N}$, 即 $\forall n \in \mathbb{N} (nx < y)$.

令 $M = \{nx \mid n \in \mathbb{N}\}$, 于是 y 是 M 的一个上界

由上确界原理, 存在 $\alpha = \sup M$.

$nx < \alpha \wedge (n+1)x < \alpha \Rightarrow nx < \alpha - x$. 即 $\alpha - x$ 也是上界, 矛盾

即 $\exists n \in \mathbb{N} (nx > y)$. □

• 有理数域在实数域内稠密: $\forall x, y \in \mathbb{R} (x < y \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q} (x < r < y))$
(处处稠密) [2-35]

① 这里的“完备”均指 Dedekind 完备, Cauchy 完备见 §3.2

证 $\exists n \in \mathbb{N} (n > \frac{1}{y-x})$. 若不然, 则 $\frac{1}{y-x}$ 是 $\mathbb{N}$ 的一个上界. 设 $\alpha = \sup \mathbb{N}$, 而 $\alpha - 1$ 也是 $\mathbb{N}$ 的上界, 矛盾.

$\Rightarrow y - x > \frac{1}{n}$. 且 $\exists m \in \mathbb{Z} (x > \frac{m}{n} \wedge x < \frac{m+1}{n})$ (还是 Archimedes 性)
于是 $y > x + \frac{1}{n} > \frac{m}{n} + \frac{1}{n} = \frac{m+1}{n} \Rightarrow x < \frac{m+1}{n} < y$ 其中 $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Q}$ $\square$

• 设 F 是完备序域, 则 F 与 $\mathbb{R}$ 同构. [2-36]

证 $\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{R}$ 的子域, 而上节已证存在单同态 $\tau: \mathbb{Q} \rightarrow F$, 目标是通过延拓将之变为同构 $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow F$.

类似 Dedekind 分割, 定义 $A_r := \{q \in \mathbb{Q} / q < r\}$

于是 $r = \sup A_r = \sup_{q \in A_r} q$

定义 $\sigma(r) := \sup \{\tau(q) / q \in A_r\} = \sup_{q \in A_r} \tau(q)$.

1) $\sigma(r)$ 是良定义的:

$\exists q' \in \mathbb{Q} (q' > r \Rightarrow \forall q \in \mathbb{Q} (q' > q) \Rightarrow \forall q \in \mathbb{Q} (\tau(q') > \tau(q))$
 $\Rightarrow \tau(q')$ 是 $\{\tau(q) / q \in A_r\}$ 的上界)

由 F 满足上确界原理, $\sup \{\tau(q) / q \in A_r\}$ 总存在.

2) $\forall q \in \mathbb{Q} (\sigma(q) = \tau(q))$:

$A_q = \{p \in \mathbb{Q} / p < q\}$. 对 $p < q$, $\tau(p) < \tau(q)$.

于是 $\tau(q)$ 是 $\{\tau(p) / p \in A_q\}$ 的一个上界.

假设存在 $a \in F$ 是 $\{\tau(p) / p \in A_q\}$ 的上界且 $a < \tau(q)$.

容易证明存在 $\tau(p) \in F$ 使 $a < \tau(p) < \tau(q)$, 即 $\tau(p)$ 也是上界:

$\tau(p) < \tau(q) \Rightarrow p < q \Rightarrow \exists s \in \mathbb{Q} (p < s < q)$. $\tau(s)$ 不是上界, 则

$\tau(p) < \tau(s)$ 也不是上界, 矛盾.

即 $\tau(q) = \sup \{\tau(p) / p \in A_q\} \Rightarrow \forall q \in \mathbb{Q} (\sigma(q) = \tau(q))$.

3) $\forall r, s \in \mathbb{R} (r < s \Leftrightarrow \sigma(r) < \sigma(s))$:

若 $r < s$, 则 $\exists x, y \in \mathbb{Q} (r < x < y < s)$

$\Rightarrow A_r \subset A_x \subset A_y \subset A_s \Rightarrow \sigma(r) \leq \sigma(x) \leq \sigma(y) \leq \sigma(s)$.

而 $x < y \Rightarrow \tau(x) < \tau(y) \Rightarrow \sigma(x) < \sigma(y)$. 于是 $\sigma(r) < \sigma(s)$.
 若 $\sigma(r) < \sigma(s)$, 则 $\exists x, y \in \mathbb{Q} (\sigma(r) < \tau(x) < \tau(y) < \sigma(s))$.
 $\Rightarrow r \leq x < y \leq s \Rightarrow r < s$.

4) σ 是双射:

σ 保序蕴涵单射.

对 $b \in F$, 令 $B := \{q \in \mathbb{Q} \mid \sigma(q) < b\}$

$\exists r, s \in \mathbb{Q} (\tau(r) < b < \tau(s))$. 即 B 非空且 s 是 B 的上界.

由上确界原理, 设 $x = \sup B$, 只要证 $\sigma(x) = b$:

若 $\sigma(x) < b$, 则 $\exists r \in \mathbb{Q} (\sigma(x) < \sigma(r) < b)$.

$\sigma(r) < b \Rightarrow r \in B \Rightarrow x \geq r$ 而 $\sigma(x) < \sigma(r) \Rightarrow x < r$. 矛盾.
 若 $\sigma(x) > b$, 则 $\exists r \in \mathbb{Q} (b < \sigma(r) < \sigma(x))$.

$b < \sigma(r) \Rightarrow \forall q \in B (\sigma(q) < \sigma(r) \Rightarrow q < r) \Rightarrow r$ 是 B 的上界.
 且 $r < x$, 与 $x = \sup B$ 矛盾.

于是 $\forall b \in F \exists x \in \mathbb{R} (\sigma(x) = b) \Rightarrow \sigma$ 是满射.

5) $\forall r, s \in \mathbb{R} (\sigma(r+s) = \sigma(r) + \sigma(s))$:

若 $\sigma(r+s) < \sigma(r) + \sigma(s)$. 则 $\exists q \in \mathbb{Q} (\sigma(r+s) < \sigma(q) < \sigma(r) + \sigma(s))$.
 $\Rightarrow \exists r', s' \in \mathbb{Q} (q = r' + s' \wedge r' < r \wedge s' < s)$

$\Rightarrow \sigma(r) + \sigma(s) > \sigma(r') + \sigma(s') = \sigma(r' + s') = \sigma(q) > \sigma(r+s)$ 矛盾.

同理 $\sigma(r+s) > \sigma(r) + \sigma(s)$ 也矛盾.

6) $\forall r, s \in \mathbb{R} (\sigma(r \cdot s) = \sigma(r) \cdot \sigma(s))$:

$\mathbb{R}_+$ 的情况与 (5) 完全相似, 其它情况利用 $\sigma(-x) = -\sigma(x)$ 可证. $\square$

► 实数的 q 进制表示.

※ 尽管 Dedekind 分割把实数定义成有理数特定的子集 ("分割"), 但实数更常见的表示是无限小数. 即使用自然数列 $\{a_n\}$ 表示实数.

• 对整数 $q > 1$, 有 $\forall x \in \mathbb{R} \exists k \in \mathbb{Z} (q^k \leq x < q^{k+1})$ [2-37]

证 假设不存在这样的 k , 则 x 是 $\{q^k | k \in \mathbb{Z}\}$ 的上界.

设 $\alpha = \sup \{q^k | k \in \mathbb{Z}\}$ $q^k \leq \alpha \wedge q^{k+1} \leq \alpha \Rightarrow q^k \leq \frac{\alpha}{q} < \alpha$
 $\Rightarrow \frac{\alpha}{q}$ 是比 α 小的上界, 矛盾. (仍然是 Archimedes 性) □

• $q > 1$. 对 $q^k \leq x < q^{k+1}$, $\exists a_n \in \mathbb{N} (a_n q^k \leq x < (a_n + 1) q^k)$

这里可见 $a_n \in \{1, 2, \dots, q-1\}$.

对 $x - a_n q^k$ 重复以上步骤:

$$\exists a_{n-1} \in \mathbb{N} (a_{n-1} q^{k-1} \leq x - a_n q^k < (a_{n-1} + 1) q^{k-1})$$

由 $a_{n-1} q^{k-1} + a_n q^k \leq x < (a_n + 1) q^k$ 也可得 $a_{n-1} \in \{1, 2, \dots, q-1\}$

以此类推: $\sum_{i=0}^p a_{n-i} q^{k-i} \leq x < \sum_{i=0}^p a_{n-i} q^{k-i} + q^{k-p}$

即存在逼近 x 的有理数序列 $\{r_p\}$: $r_p = a_n q^k + \dots + a_{n-p} q^{k-p}$

使 $\forall p \in \mathbb{N} (r_p \leq x < r_p + q^{k-p})$.

□ Def. 正实数的 q 进制表示.

设序列 $\{r_p\}$ 以如上方式逼近正实数 x ,

若 $n \geq 0$, 在 a_n 与 a_{n-1} 间加上小数点, 记为 $x = a_n \dots a_0 . a_{-1} \dots$

若 $n < 0$, 在 a_n 前补 $|n|$ 个 0 并加小数点, 记为 $x = 0.0 \dots 0 a_n a_{n-1} \dots$

其中每个 $a_i \in \{1, \dots, q-1\}$.

• 对写作 $a_n \dots a_0 . a_{-1} \dots$ 或 $0.0 \dots 0 a_n a_{n-1} \dots$ 的 q 进制数 (序列), 总存在正实数 x 与之对应. [2-38]

证 有理序列 $r_p = \sum_{i=0}^p a_{n-i} q^{k-i}$ 满足:

$$r_0 \leq r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_p \leq r_p + q^{k-p} \leq r_{p-1} + q^{k-p+1} \leq \dots \leq r_0 + q^k$$

取 $x = \sup_{p \in \mathbb{N}} r_p$, 显然 $x = \inf_{p \in \mathbb{N}} (r_p + q^{k-p})$

于是 x 满足 $\forall p \in \mathbb{N} (r_p \leq x < r_p + q^{k-p})$ 是其表示的正实数. □

※ 该表示并不惟一! 如 $1 = 1.00 \dots = 0.99 \dots$

例 $\sqrt{2}$ 的十进制表示.

易证 $\exists x \in \mathbb{R}_+ (x^2 = 2)$, x 记为 $\sqrt{2}$

$$10^0 \leq \sqrt{2} < 10^1 \Rightarrow n = 0$$

$$\text{Step 1 } 1^2 \leq 2 < 2^2 \Rightarrow 1 \times 10^0 \leq \sqrt{2} < 2 \times 10^0 \Rightarrow a_0 = 1$$

$$\text{Step 2 } 1 \times 10^0 + 4 \times 10^{-1} \leq \sqrt{2} < 1 \times 10^0 + 5 \times 10^{-1} \Rightarrow a_1 = 4$$

$$\text{Step 3 } 1 \times 10^0 + 4 \times 10^{-1} + 1 \times 10^{-2} \leq \sqrt{2} < 1 \times 10^0 + 4 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2} \\ \Rightarrow a_2 = 1$$

.....

$$\sqrt{2} = 1.41 \dots$$

§2.5 实数的完备性与度量

※ 本节给出与上确界原理等价的几个完备性定理.

▶ 闭区间套定理.

• (Cantor 闭区间套) 设闭区间序列 $I_n = [a_n, b_n]$ 满足 $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n$, 则 $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$, 即闭区间的交必含一点. [2-39]

证 首先, $\forall n \in \mathbb{N}^* (a_n \leq b_1)$, 若不然, 设 $a_p > b_1$, 则 $I_1 \cap I_p = \emptyset$, 与 $I_p \subset I_1$ 矛盾.

b_1 是 $\{a_n | n \in \mathbb{N}^*\}$ 的一个上界, 设 $c = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} a_n$.

同理 $\{b_n | n \in \mathbb{N}^*\}$ 有下界, 设 $d = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} b_n$.

若 $\sup_{n \in \mathbb{N}^*} a_n > \inf_{n \in \mathbb{N}^*} b_n$, 则 $\exists p \in \mathbb{N}^* (\sup_{n \in \mathbb{N}^*} a_n > b_p)$, 则 $\exists p, q \in \mathbb{N}^* (a_q > b_p)$

$\Rightarrow I_p \cap I_q = \emptyset$, 矛盾. 则只能是 $\sup_{n \in \mathbb{N}^*} a_n \leq \inf_{n \in \mathbb{N}^*} b_n$.

于是 $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} I_n \supset [\sup_{n \in \mathbb{N}^*} a_n, \inf_{n \in \mathbb{N}^*} b_n] \neq \emptyset$. □

※ 若闭区间套还满足 $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}^* (b_n - a_n < \varepsilon)$, 则 $\exists ! x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} I_n$.

这里 $x = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} b_n$. 上节的有理序列的闭区间套 $I_p = [r_p, r_p + q^{p-k}]$

正是如此.

▶ $\mathbb{R}$ 上的度量及相关概念.

□ Def. 度量, 度量空间

集合 S 上的映射 $d: S \times S \rightarrow \mathbb{R}$ 称为度量, 若满足:

1) 非负性: $\forall x, y \in S (d(x, y) \geq 0 \wedge d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$

2) 对称性: $\forall x, y \in S (d(x, y) = d(y, x))$

3) 三角不等式: $\forall x, y, z \in S (d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y))$

例 离散度量: $d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$

例 $\mathbb{R}$ 上的度量 $d(x, y) = |x - y|$

(S, d) 称为度量空间.

□ Def. $\mathbb{R}$ 上的邻域

对度量空间 S 的点 a , 称 $U \subset S$ 是 a 的邻域, 若 $\exists B \subset S \exists r > 0$
 $(B := \{x \in S \mid d(x, a) < r\})$

对 $a \in \mathbb{R}$, 任意包含 a 的开区间 U 都是 a 的邻域.

对 $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, 点 a 的 ε 邻域是指开区间 $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$.

□ Def. $\mathbb{R}$ 上的开集

$E \subset \mathbb{R}$ 称为开集, 若 $\forall x \in E \exists \varepsilon > 0 (]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset E)$.

即 E 中每个点都有含于 E 的邻域.

□ Def. $\mathbb{R}$ 上的极限点, 闭集.

$a \in \mathbb{R}$ 称为 $E \subset \mathbb{R}$ 的极限点, 若 a 的任意邻域都含有 $b \neq a \wedge b \in E$.

$E \subset \mathbb{R}$ 称为闭集, 若每个 E 的极限点 a 都有 $a \in E$.

□ Def. $\mathbb{R}$ 上的开覆盖, 紧集

对 $E \subset \mathbb{R}$, 由 $\mathbb{R}$ 上开集构成的集族 $\{G_\alpha \mid \alpha \in J\}$ 称为 E 的开覆盖,
 若 $E \subset \bigcup_{\alpha \in J} G_\alpha$.

$E \subset \mathbb{R}$ 称为紧集, 若 E 的任意开覆盖都有有限子集族是 E 的开覆盖.

* 易见, 以上概念都能不加修改地推广到一般度量空间中.

• $E \subset \mathbb{R}$ 是开集当且仅当 E 的补集 $E^c (:= \mathbb{R} \setminus E)$ 是闭集

证 1) 若 E 是开集, 对 $x \in E \Rightarrow x \notin E^c$, 由定义存在 x 的邻域 $U(x) \subset E$.
 于是 $U(x) \cap E^c = \emptyset \Rightarrow x$ 不是 E^c 的极限点.

即 $\forall x \in \mathbb{R} (x \text{ 是 } E^c \text{ 的极限点} \Rightarrow x \in E^c) \Rightarrow E^c \text{ 是闭集}$

2) 若 E 是闭集, 对 $x \in E^c \Rightarrow x \notin E \Rightarrow x$ 不是 E 的极限点.

$\Rightarrow$ 存在 x 的邻域 $U(x) \cap E = \emptyset \Rightarrow U(x) \subset E^c$ 于是 E^c 是开集. $\square$

• $\mathbb{R}$ 上的开集:

1) $\emptyset, \mathbb{R}$ 是开集

2) 开集的任意并是开集.

3) 开集的有限交是开集.

4) $E \subset \mathbb{R}$ 是开集, 当且仅当 E 可以表示成不交的开区间之并. [2-41]

证 1) 非常显然

2) 考虑开集族 $\{E_\alpha \mid \alpha \in J\}$

$$\forall a \in \bigcup_{\alpha \in J} E_\alpha \exists \alpha \in J (a \in E_\alpha)$$

$\Rightarrow \exists a$ 的邻域 $U(a) \subset E_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in J} E_\alpha \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in J} E_\alpha$ 是开集.

3) 考虑开集族 $\{E_k \mid k=1, \dots, n\}$

$$\forall a \in \bigcap_{k=1}^n E_k \forall k \in \{1, \dots, n\} (a \in E_k)$$

$\Rightarrow \forall k \in \{1, \dots, n\} \exists a$ 的邻域 $U_k \subset E_k$

而对 $U_k, \exists \varepsilon_k > 0 (]a - \varepsilon_k, a + \varepsilon_k[\subset U_k \subset E_k)$

设 $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$.

有 $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[= \bigcap_{k=1}^n]a - \varepsilon_k, a + \varepsilon_k[\subset \bigcap_{k=1}^n E_k \Rightarrow \bigcap_{k=1}^n E_k$ 是开集

(若将“有限并”改成“任意并”, 可能 $\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k = \{a\}$ 不再是 a 的邻域)

4) 充分性: 首先, 开区间是开集:

对 $c \in (a, b)$, 设 $\varepsilon = \min\{c-a, b-c\}$.

则 $]c - \varepsilon, c + \varepsilon[\subset (a, b) \Rightarrow (a, b)$ 是开集.

再由(2), 开区间的任意并是开集.

必要性: 对 $m \in$ 开集 E ,

i) 设 $a_m = \sup(E^c \cap]-\infty, m])$, 若 $E^c \cap]-\infty, m]$ 为空则 $a_m = -\infty$;

$b_m = \inf(E^c \cap [m, +\infty[)$, 若 $E^c \cap [m, +\infty[$ 为空则 $b_m = +\infty$.

m 是 $E^c \cap]-\infty, m]$ 的上界 $\Rightarrow a_m \leq m$. 且由 E 是开集, 有

$\exists \varepsilon > 0 ((E^c \cap]-\infty, m]) \cap]m-\varepsilon, m+\varepsilon[= \emptyset) \Rightarrow a_m < m$. 同理 $m < b_m$

ii) 对 $c \in]a_m, b_m[$, 假设 $c \notin E \Rightarrow c \in E^c$

$\downarrow$
 $m \in]a_m, b_m[$

若 $c > m \Rightarrow c \in E^c \cap [m, +\infty[\Rightarrow c \geq b_m$, 矛盾;

若 $c < m \Rightarrow c \in E^c \cap]-\infty, m] \Rightarrow c \leq a_m$, 矛盾.

于是 $c \in E \Rightarrow]a_m, b_m[\subset E$.

iii) 对 $m \in]\alpha, \beta[\subset E$.

若 $a_m = -\infty$, 显然 $\alpha > a_m$;

若 $a_m \neq -\infty$, 假设 $\alpha < a_m = \sup(E^c \cap]-\infty, m])$

则 $\exists \alpha < \alpha' < a_m (\alpha' \in E^c \cap]-\infty, m] \Rightarrow \alpha' \in E^c) \Rightarrow]\alpha, \beta[\not\subset E$

(若不存在这样的 α' , 则 α' 是 $E^c \cap]-\infty, m]$ 的上界, 矛盾.)

于是 $\alpha \geq a_m$. 同理 $\beta \leq b_m \Rightarrow]\alpha, \beta[\subset]a_m, b_m[$

iv) $m \in]a_m, b_m[\Rightarrow E = \bigcup_{m \in E}]a_m, b_m[$

若 $]a_m, b_m[\cap]a_n, b_n[\neq \emptyset$, 则 $\exists c \in]a_m, b_m[\cap]a_n, b_n[$.

由 (iii), 有 $]a_m, b_m[\subset]a_n, b_n[$ 以及 $]a_n, b_n[\subset]a_m, b_m[$.

$\Rightarrow]a_m, b_m[=]a_n, b_n[$. 即构成 E 的开区间要么相同要么不交. $\square$

* 开集的性质 (1) ~ (3) 对任意度量空间都成立.

在一般拓扑空间中, 性质 (1) ~ (3) 是开集的定义 (开集是拓扑空间的基本对象).

• $\mathbb{R}$ 上的闭集

1) $\emptyset, \mathbb{R}$ 是闭集

2) 闭集的有限并是闭集

3) 闭集的任意交是闭集

4) 闭区间是闭集.

[2-42]

证 1) $\emptyset^c = \mathbb{R}$ 是开集 $\Rightarrow \emptyset$ 是闭集; $\mathbb{R}^c = \emptyset$ 是开集 $\Rightarrow \mathbb{R}$ 是闭集.

※ 可见 $\emptyset, \mathbb{R}$ 既开又闭.

2) 考虑闭集族 $\{E_k | k=1, \dots, n\}$

$\forall k (R \setminus E_k \text{ 是开集}) \Rightarrow \bigcap_{k=1}^n (R \setminus E_k) \text{ 是开集} \Rightarrow R \setminus (\bigcup_{k=1}^n E_k) \text{ 是开集}$
 $\Rightarrow \bigcup_{k=1}^n E_k \text{ 是闭集.}$

3) 考虑闭集族 $\{E_\alpha | \alpha \in J\}$

$\forall \alpha \in J (R \setminus E_\alpha \text{ 是开集}) \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in J} (R \setminus E_\alpha) = R \setminus (\bigcap_{\alpha \in J} E_\alpha) \text{ 是开集}$
 $\Rightarrow \bigcap_{\alpha \in J} E_\alpha \text{ 是闭集}$

4) $]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$ 是开集, 其补集 $[a, b]$ 自然是闭集. $\square$

• 紧集的性质

1) 紧集是闭集

2) 紧集的闭子集仍是紧集.

[2-43]

证 1) 设 $E \subset \mathbb{R}$ 是紧集, 只要证 E^c 是开集:

对 $p \in E^c$, 记 $q \in E$ 的邻域 $U_q := \{x \in \mathbb{R} | |x - q| < \frac{1}{2}|p - q|\}$.

E 是紧集, 且 $E = \bigcup_{q \in E} U_q$, 由定义 $\exists q_1, \dots, q_n \in E (E = \bigcup_{i=1}^n U_{q_i})$.

设 p 的邻域 $V := \{x \in \mathbb{R} | |x - p| < \frac{1}{2} \min\{|p - q_i|\}\}$.

易得 $\forall i \in \{1, \dots, n\} (U_{q_i} \cap V = \emptyset) \Rightarrow V \cap (\bigcup_{i=1}^n U_{q_i}) = \emptyset$

$\Rightarrow V \cap E = \emptyset \Rightarrow V \subset E^c$.

即 $\forall p \in E^c \exists V_p \subset E^c \Rightarrow E^c$ 是开集.

2) 设 $E \subset \mathbb{R}$ 是紧集, $F \subset E$ 是 $\mathbb{R}$ 中的闭集.

设集族 $\{G_\alpha | \alpha \in J\}$ 是 F 的开覆盖.

F^c 是开集 $\Rightarrow \{G_\alpha | \alpha \in J\} \cup \{F^c\}$ 是 E 的开覆盖.

由紧性, 存在有限子族 $\Omega \subset \{G_\alpha | \alpha \in J\} \cup \{F^c\}$ 是 E 的开覆盖.

而 $F \subset E \subset \bigcup \Omega$, 即 Ω 也是 F 的开覆盖, F 是紧集. $\square$

※ Again, 该性质对任意度量空间都成立.

然而下面的定理则不然, 它与实数的完备性等价:

• Heine-Borel 有限覆盖定理

$E \subset \mathbb{R}$ 是紧集, 当且仅当 E 是有界闭集. [2-44]

证 1) 若 E 是紧集, 则已证 E 是闭集, 下面证 E 有界:

假设 E 无上界, 由于 $E \subset \mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]n, n+2[$, 则 $\{]n, n+2[\mid n \in \mathbb{Z} \}$ 是 E 的开覆盖, E 是紧集 $\Rightarrow \exists n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z} (E \subset \bigcup_{i=1}^k]n_i, n_i+2[)$.

$\Rightarrow \max \{n_i+2\}$ 是 E 的上界. 矛盾. E 有上界.

同理 E 有下界 $\Rightarrow E$ 有界.

2) 若 E 是有界闭集, 设 a, b 为 E 的一个下界 & 上界

$\Rightarrow E \subset I_0 = [a, b]$, 只要证 I_0 是紧集, 则闭子集 E 也自然是紧集.

假设 I_0 不是紧集, $I_0 = [a, \frac{a+b}{2}] \cup [\frac{a+b}{2}, b]$

$\Rightarrow [a, \frac{a+b}{2}]$ 或 $[\frac{a+b}{2}, b]$ 不是紧集 (紧集有限并是紧集)

记其中不为紧集的区间为 I_1 , 并重复此二分过程,

得闭区间套 $I_0 \supset I_1 \supset \dots \supset I_n$, 每个区间都不紧.

$\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} (\varepsilon < (\frac{1}{2})^k (b-a)) \Rightarrow \exists ! x (x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n)$.

设 $\{G_\alpha \mid \alpha \in J\}$ 开覆盖 I_0 , $\exists \alpha \in J \exists]c, d[\subset G_\alpha (x \in]c, d[)$.

令 $\varepsilon := \min \{x-c, d-x\} \Rightarrow \exists I_n \subset]c, d[\Rightarrow I_n$ 是紧集. 矛盾.

即 I_0 是紧集 $\Rightarrow E$ 是紧集. $\square$

• 若 $a \in \mathbb{R}$ 是 $E \subset \mathbb{R}$ 的极限点, 则 a 的任意邻域与 E 的交集都是无限集.

证 假设存在 a 的邻域 N , 使 $N \cap E = \{q_1, \dots, q_n\}$. [2-45]

令 $\varepsilon = \min \{|q_i - a|\}$, 则 $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap E = \emptyset$

$\Rightarrow a$ 不是 E 的极限点. 矛盾.

即每个邻域 N 与 E 交集都是无限集. $\square$

• Bolzano-Weierstrass 极限点存在定理

$\mathbb{R}$ 上的有界无限集存在极限点.

[2-46]

证 设 $E \subset \mathbb{R}$ 是有界无限集, $\exists I = [a, b] (E \subset I)$

下面证 I 中存在 E 的极限点

假设不存在, 则 $\forall q \in I \exists q$ 的邻域 $N_q \exists ! p \in N_q \cap E (p = q)$

$I \subset \bigcup_{q \in E} N_q \Rightarrow \{N_q | q \in E\}$ 是 I 的开覆盖. 而 $\{N_q | q \in E\}$ 的有限子族都不能覆盖 E , 也不能覆盖 I . 这与 Heine-Borel 定理矛盾. $\square$

□ Def. 闭包

对 $E \subset \mathbb{R}$, 设 $E' \subset \mathbb{R}$ 是 E 的所有极限点的集合.

E 的闭包 $\bar{E} := E \cup E'$.

• 闭包的性质

1) $\forall E \subset \mathbb{R} (\bar{E} \text{ 是闭集})$

2) $E = \bar{E} \Leftrightarrow E \text{ 是闭集}$

3) $\forall E, F \subset \mathbb{R} (F \text{ 是闭集} \wedge E \subset F \Rightarrow \bar{E} \subset F)$

[2-47]

证 1) 对 $p \in \bar{E}^c = \mathbb{R} \setminus (E \cup E')$, $p \notin E$ 且 p 不是 E 的极限点

$\Rightarrow$ 存在 p 的邻域 $N_p \cap E = \emptyset$

假设 $N_p \cap E' \neq \emptyset$, 即 $\exists q \in N_p \cap E' \forall q$ 的邻域 $N_q \exists r (r \in N_q \cap E)$

而 N_p 是开集 $\Rightarrow \exists N_q \subset N_p (N_q \cap E = \emptyset)$ 与 q 是极限点矛盾

$\Rightarrow N_p \cap (E \cup E') = \emptyset \Rightarrow N_p \subset \bar{E}^c \Rightarrow \bar{E}^c \text{ 是开集} \Rightarrow E \text{ 是闭集}$

2) $E = \bar{E} \Leftrightarrow E' \subset E \Leftrightarrow E \text{ 是闭集}$

3) $E \subset F \Rightarrow E' \subset F'$; $F \text{ 是闭集} \Rightarrow F' \subset F$

于是 $\bar{E} = E \cup E' \subset F \cup F' = F$

$\square$

※ E 的闭包是包含 E 的最小闭集.

• 实数域是有理数域的闭包: $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

[2-48]

证 Archimedes 性的推论. $\forall r \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists q \in \mathbb{Q} (r - \varepsilon < q < r + \varepsilon)$.

即每个实数都是有理数集的极限点. $\mathbb{Q}' = \mathbb{R} \Rightarrow \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. □

§ 2.6 复数

□ Def. 向量空间 $\mathbb{R}^n$.

$$\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ 个 } \mathbb{R}} := \{(x^1, \dots, x^n) \mid x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}.$$

其上定义了向量加法 & 标量乘法:

$$(x^1, \dots, x^n) + (y^1, \dots, y^n) := (x^1 + y^1, \dots, x^n + y^n)$$

$$\lambda \in \mathbb{R}, \lambda(x^1, \dots, x^n) := (\lambda x^1, \dots, \lambda x^n).$$

※ 易证其满足向量空间的如下公理:

P_1 加法交换律 $\forall u, w \in \mathbb{R}^n (u + w = w + u)$

P_2 加法结合律 $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^n ((u + v) + w = u + (v + w))$

P_3 加法单位元 $\exists 0 \in \mathbb{R}^n \forall v \in \mathbb{R}^n (v + 0 = v)$

P_4 加法逆元 $\forall v \in \mathbb{R}^n \exists w \in \mathbb{R}^n (v + w = 0)$

P_5 数乘单位元 $\forall v \in \mathbb{R}^n (1 \cdot v = v)$

P_6 分配律 $\forall \lambda, \eta \in \mathbb{R}, v, w \in \mathbb{R}^n (\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w, (\lambda + \eta)v = \lambda v + \eta v).$

• $\mathbb{R}^n$ 上还可定义内积: $\langle (x^1, \dots, x^n), (y^1, \dots, y^n) \rangle = \sum_{i=1}^n x^i y^i$

以及由内积诱导的范数(度量):

$$\|(x^1, \dots, x^n)\| = \sqrt{\langle (x^1, \dots, x^n), (x^1, \dots, x^n) \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x^i)^2}$$

这样 $\mathbb{R}^n$ 就是 Euclid 空间. 且所有域 $\mathbb{R}$ 上的有限维向量空间都与 $\mathbb{R}^n$ 等距同构. (线性代数范畴)

※ $\mathbb{R}^n$ 是完备的度量空间, 上节的结论对 $\mathbb{R}^n$ 也成立 (见“点集拓扑”一章).

□ Def. 复数域 $\mathbb{C}$

复数域 $\mathbb{C}$ 是定义了如下乘法的向量空间 $\mathbb{R}^2$:

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$$

• 复数域是域

[2-49]

证 只检验与乘法相关的几个性质：

乘法交换律 显然

乘法结合律 $((a, b) \cdot (c, d)) \cdot (e, f) = (ac - bd, ad + bc) \cdot (e, f)$

$$= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce)$$

$$= (a(ce - df) - b(de + cf), a(cf + de) + b(ce - df))$$

$$= (a, b) \cdot (ce - df, de + cf) = (a, b) \cdot ((c, d) \cdot (e, f))$$

乘法单位元 $1_{\mathbb{C}} = (1, 0)$

$$(a, b) \cdot (1, 0) = (a, b)$$

$$\text{乘法逆元 } (a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right) = \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} - \frac{-b^2}{a^2 + b^2}, -\frac{ab}{a^2 + b^2} + \frac{ab}{a^2 + b^2} \right)$$

$$= (1, 0)$$

$$\Rightarrow (a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right)$$

乘法分配律 $(a, b) \cdot ((c, d) + (e, f)) = (a, b) \cdot (c + e, d + f)$

$$= (a(c + e) - b(d + f), a(d + f) + b(c + e))$$

$$= (ac - bd + ae - bf, ad + bc + af + be)$$

$$= (ac - bd, ad + bc) + (ae - bf, af + be) = (a, b) \cdot (c, d) + (a, b) \cdot (e, f). \quad \square$$

• 复数域 $\mathbb{C}$ 的子域 $\hat{\mathbb{R}} := \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ 与 $\mathbb{R}$ 同构。

这样就把数系从 $\mathbb{R}$ 扩充到了 $\mathbb{C}$

* 一般把 $(1, 0)$ 记为 1 , $(0, 1)$ 记为 $i \Rightarrow (a, b)$ 常写作 $a + bi$

于是有了中学熟悉的 $i^2 = -1$ 。

• 复数域不是序域，即不能定义 $\mathbb{C}$ 上的全序关系使之满足与加法 & 乘法的关系。

证 假设存在这样一个序关系，则有 $i > 0 \vee i < 0$

[2-50]

$$\text{若 } i > 0, \text{ 则 } i^2 = -1 > 0 \Rightarrow 1 < 0 \Rightarrow (-1)^2 < 0$$

这与 $(x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow xy > 0)$ 矛盾

若 $i < 0$, 则 $-i > 0 \Rightarrow -1 = (-i)^2 > 0$, 导出同样的矛盾.

$\Rightarrow$ 使 $\mathbb{C}$ 成为序域的序关系不存在. □

► 复数的一些导出概念

□ Def. 实部, 虚部.

对 $z = a + bi \in \mathbb{C}$, 实部 $\operatorname{Re} z := a$, 虚部 $\operatorname{Im} z = b$

$$\Rightarrow z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z.$$

□ Def. 共轭复数

对 $z = a + bi \in \mathbb{C}$, 其共轭复数 $z^* := a - bi$

可见 $z + z^* = 2\operatorname{Re} z \in \mathbb{R}$, $zz^* = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 \in \mathbb{R}$.

□ Def. 复数的极坐标表示, 幅角

复数有所谓极坐标表示: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

$r = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$ 是复数的绝对值

$\theta = \arctan \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ 是复数的幅角, 记为 $\theta = \arg z$.

※ 三角函数尚未严格定义! 见 § 3.4

• 设 $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$

有 $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$.

$$\Rightarrow \arg(\theta_1 + \theta_2) = \arg \theta_1 + \arg \theta_2.$$

► 代数闭域

□ Def. 多项式环

环 R 上的多项式环 $R[x] := \{ \{a_n\} \mid a_i \in R, \exists m \in \mathbb{N} \forall n > m (a_n = 0) \}$

其上定义了加法 & 乘法:

$$\{a_n\} + \{b_n\} := \{a_n + b_n\}; \quad \{a_n\} \cdot \{b_n\} := \left\{ \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} \right\}$$

一般形式化地把 $\{a_n\} \in R[x]$ 写作 $R[x] \ni f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

• 复数域 $\mathbb{C}$ 是代数闭域.

[2-51]

即次数 $n \geq 1$ 的多项式 $p \in \mathbb{C}[x]$ 在 $\mathbb{C}$ 上必有一根 (代数基本定理).

这个定理的证明在P

※ 复数域 $\mathbb{C}$ 是最大的数域, 不再需要比 $\mathbb{C}$ 更大的域了. [2-52]

§2.7 可数集与不可数集

□ Def. 有限集, 无限集

若 S 与 $\{1, 2, \dots, n\}$ 对某个 $n \in \mathbb{N}$ 等势, 则称 S 是有限集 ($\emptyset$ 是有限集)

若 S 不是有限集, 则称 S 是无限集.

※ 这个定义是与 §1.5 对有限集 & 无限集的定义等价的.

□ Def. 可数集, 不可数集

无限集 S 称为可数集, 若 $\text{card } S = \text{card } \mathbb{N}$; 否则 S 称为不可数集.

• 可数集是最小的无限集.

任意无限集都有可数子集. (需要 AC!)

证 由选择公理 (AC), 在无限集 S 中取 $x_1 \in S$, 令 $\varphi(1) = x_1$.

此时 $S \setminus \{x_1\}$ 仍为无限集, 取 $x_2 \in S \setminus \{x_1\}$, 令 $\varphi(2) = x_2$.

归纳可得 $\forall n \in \mathbb{N}^* \exists! x_n \in S (\varphi(n) = x_n)$, 且 φ 是单射.

$\Rightarrow \{x_n | n \in \mathbb{N}^*\} \subset S$ 与 $\mathbb{N}$ 等势, 是可数集. □

※ 可数集的无限子集是可数集.

证 若 S 可数, 则 $\text{card } S = \text{card } \mathbb{N}$. 对无限集 $E \subset S$,

有 $\text{card } E \leq \text{card } S$ 且 $\text{card } \mathbb{N} \leq \text{card } E$

$\Rightarrow \text{card } E = \text{card } \mathbb{N}$. □

• 可数个可数集之并是可数集.

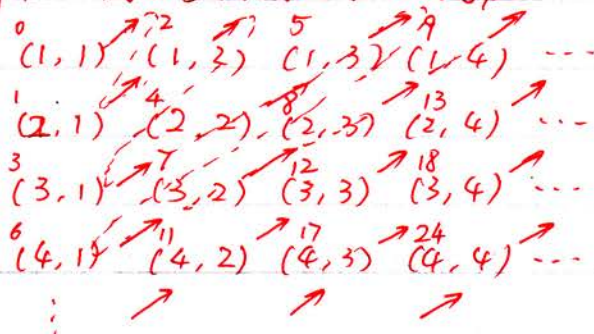
证 设 $S_m := \{a_{m,1}, a_{m,2}, \dots\}$ 可数, 要证 $\bigcup_{m=1}^{\infty} S_m := \{a_{m,n} | m, n \in \mathbb{N}\}$ 是可数集, 用所谓对角线法:

映射 $\varphi: \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \rightarrow \bigcup_{m=1}^{\infty} S_m$, $\varphi(m, n) := a_{m,n}$

显然 φ 是满射, 则存在 $\bigcup_{m=1}^{\infty} S_m$ 到 $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ 的单射 (需要 AC?)

$$\Rightarrow \text{card} \bigcup_{m=1}^{\infty} S_m \leq \text{card}(\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*)$$

而 $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ 与 $\mathbb{N}$ 有以下一一对应:



$$\text{于是 } \text{card}(\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*) = \text{card } \mathbb{N} \Rightarrow \text{card} \bigcup_{m=1}^{\infty} S_m = \text{card } \mathbb{N}$$

即可数个可数集之并可数. $\square$

* 至多可数个至多可数集 ($:=$ 可数集 + 有限集) 是至多可数集. [2-56]

► 可数集的例子

• $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ 是可数集 [2-57]

证 1) 由 §2.2, 整数集 $\mathbb{Z} := (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) / \sim$.

对任意集合 S 的商集 $S / \sim$, 存在单射 $S / \sim \rightarrow S, [a]_{\sim} \mapsto a$.

$$\Rightarrow \text{card}(S / \sim) \leq \text{card } S.$$

$$\text{于是 } \text{card } \mathbb{Z} = \text{card}[(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) / \sim] \leq \text{card}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \text{card } \mathbb{N}.$$

$$\mathbb{Z} \text{ 是无限集 } \Rightarrow \text{card } \mathbb{Z} = \text{card } \mathbb{N}.$$

2) 由 §2.3, 有理数集 $\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}) / \sim$

$$\text{card } \mathbb{Q} \leq \text{card}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}) = \text{card } \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \text{card } \mathbb{Q} = \text{card } \mathbb{N}. \quad \square$$

□ Def. 代数数.

$x \in \mathbb{R}$ 称为代数数, 若 $\exists n \in \mathbb{N}^* \exists q_0, \dots, q_n \in \mathbb{Q} (\sum_{i=0}^n q_i x^i = 0) (q_n \neq 0)$

• 全体代数数的集合是可数集. [2-58]

证 例如 $\sum_{i=0}^n q_i x^i = 0$ 的有理系数方程的全体与 $\bigcup_{n=2}^{\infty} \mathbb{Q}^n$ 等势.

而 $\text{card} \bigcup_{n=2}^{\infty} \mathbb{Q}^n = \text{card } \mathbb{N} \Rightarrow$ 全体 $\sum_{i=0}^n q_i x^i = 0 (q_n \neq 0)$ 可数.

每个有理方程的根是有限集，于是全体代数数仍为可数集

不可数集

※ 由 Cantor 定理: $\text{card } \mathcal{P}(\mathbb{N}) > \text{card } \mathbb{N}$.

说明不可数集一定存在.

• $\mathbb{R}$ 是不可数集.

[2-59]

证 这个结论有成吨的证法，这里列出两个.

证一 (闭区间套)

只要证 $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ 不可数:

假设 $[0, 1]$ 可数，将其写成 $\{x_n | n \in \mathbb{N}^*\}$ 的形式.

$I_0 = [0, 1]$. 若 $x_1 \neq 1$, 则 $\exists y_1 \in I_0$ ($x_1 < y_1 < 1$)

$\Rightarrow x_1 \notin I_1 := [y_1, 1]$; 若 $x_1 = 1$, 则 $x_1 \notin I_1 := [0, \frac{1}{2}]$.

而对闭区间 I_n 使 $x_n \notin I_n$, 相似地作出闭区间 $I_{n+1} \subset I_n$ 使 $x_{n+1} \notin I_{n+1}$.

$\Rightarrow$ 归纳得 $\forall n \in \mathbb{N}^* (x_n \notin I_n \Rightarrow x_n \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n)$.

由闭区间套定理, $\exists a (a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* (a \neq x_n))$.

导出矛盾, 即 $[0, 1]$ 不可数, $\mathbb{R}$ 自然不可数. $\square$

证二 (二进制)

令 A 的全体元素为 0 或 1 的序列的集合.

每个 $r \in \mathbb{R}$ 都有二进制表示, 对应唯一的 $\{a_n\} \in A$

而每个 $\{a_n\} \in A$ 都唯一对应一个 $r \in [0, 2]$. $\rightarrow$ Schröder-Bernstein 定理.

$\Rightarrow \text{card } A = \text{card } [0, 2]$, 下面只要证 A 不可数:

假设 A 可数, 将其写成 $\{s_n | n \in \mathbb{N}^*\}$ 的形式.

考虑 $s \in A$, 它的第 1 位与 s_1 的第 1 位相反; $\Rightarrow s \neq s_1$

$\dots$ 它的第 n 位与 s_n 的第 n 位相反.

即 $\forall n \in \mathbb{N}^* (s \neq s_n)$, 导出矛盾.

$\Rightarrow A$ 不可数 $\Rightarrow [0, 2]$ 不可数 $\Rightarrow \mathbb{R}$ 不可数. $\square$

• $\text{card } \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \text{card } \mathbb{R}$ [2-60]

证 考虑 $f: (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \tan[\frac{\pi}{2}(x-1)]$ (按平面几何的定义).

f 是双射 $\Rightarrow \text{card}(0, 2) = \text{card } \mathbb{R} \Rightarrow \text{card}[0, 2] = \text{card } \mathbb{R}$

而由上个证明二, 有 $\text{card } A = \text{card}[0, 2]$.

(其中 A 是全体元素为 0 或 1 的序列) 因此只要证 $\text{card } \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \text{card } A$:

对 $E \subset \mathbb{N}$, 考虑特征函数: $\chi_E: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$.

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \in \mathbb{N} \setminus E \end{cases}$$

因此每个 $E \subset \mathbb{N}$ 确定唯一 $\{\chi_E(n)\} \in A$.

相似地, 每个 $\{a_n\} \in A$ 都确定唯一 $E := \{n | a_n = 1\} \subset \mathbb{N}$.

由 SB 定理, $\text{card } \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \text{card } A$. □

• $\text{card } \mathbb{R}^n = \text{card } \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N})$ [2-61]

(思路) 只要证 $\text{card } \mathbb{R}^2 = \text{card } \mathbb{R}$ 然后归纳即可.

需要以下引理: 对无限集 A , 若 $\text{card } B \leq \text{card } A$ 且 $A \cap B = \emptyset$, 则 $\text{card}(A \cup B) = \text{card } A$.

引理的证明仿造基数可比较的证明 (构造映射集合, 用 Zorn 引理得最大元 — “order by extension”).

设 $\Omega := \{f | f: E \times E \rightarrow E \text{ 双射}, E \subset \mathbb{R}\}$.

由 order by extension 得 Ω 有最大元 $f_M: M \times M \rightarrow M$.

即 $\text{card}(M \times M) = \text{card } M$. 接下来只要证 $\text{card } M = \text{card } \mathbb{R}$.

用反证法得 $\text{card } \mathbb{R} \setminus M < \text{card } M$ (否则 f_M 不是最大元).

$\Rightarrow \text{card } M = \text{card}(M \cup \mathbb{R} \setminus M) = \text{card } \mathbb{R}$. ▣

• $\text{card } \mathbb{C} = \text{card } \mathbb{R}$.

序列与级数

63

§3.1 序列极限

Def. 序列 Sequences

一个集合 S 中的一个序列是映射 $\mathbb{N}_+ \rightarrow S, n \mapsto a_n$.

通常序列写成 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, \dots\}$

本章主要考虑实数列 $\mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ 和复数列 $\mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{C}$.

Rem 有时谈到序列, 我们指的是序列的值域, 即 $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ 上的一个至多可数子集.

Def. 序列极限 Limit of sequences.

设 $\{a_n\}$ 是 $E \subset \mathbb{R}$ 的序列, 若存在 $a \in E$,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N (|a_n - a| < \varepsilon)$$

则称 $\{a_n\}$ 沿 E 收敛于 a (极限是 a), 记作 $a_n \rightarrow a$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

若这样的 a 不存在, 则 $\{a_n\}$ 发散.

(复数列极限类似).

Rem. $\{a_n\}$ 的敛散性取决于 E . 如 $a_n = \frac{1}{n}$ 在 $\mathbb{R}$ 上收敛但在 $\mathbb{R}_+$ 上发散.

Rem. 极限定义中的 " $>$ " 换成 " $\geq$ " 是完全等价的.

Prop. 3.1 极限的拓扑性质

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in E \subset \mathbb{R} \iff \forall N_a \exists k \in \mathbb{N} \forall n > N (a_n \in N_a)$

ii) 若 $a \in \mathbb{R}$ 是 $E \subset \mathbb{R}$ 的极限点, 则 $\exists \{a_n\} \subset E (a_n \rightarrow a)$.

Proof. i) $\Rightarrow$: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in E$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \forall n > N (|a_n - a| < \varepsilon)$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \forall n > N (a_n \in B(a, \varepsilon))$$

由邻域定义, $\forall N_a \exists \varepsilon > 0 (B(a, \varepsilon) \subset N_a)$

$$\Rightarrow \forall N_a \exists k \in \mathbb{N} \forall n > N (a_n \in B(a, \varepsilon))$$

$\Leftarrow$: 注意 $B(a, \varepsilon)$ 就是 a 的邻域.

ii) 回顾极限点的定义:

$a \in \mathbb{R}$ 是 $E \subset \mathbb{R}$ 的极限点, 若 $\forall N_a \exists q \in E \cap N_a (a \neq q)$
 即 $\forall n \in \mathbb{N}_+ \exists a_n \in E \cap B(a, \frac{1}{n}) (a_n \neq a)$

要证明 $a_n \rightarrow a$:

$\forall \varepsilon > 0$, 取 $k \in \mathbb{N}_+$ s.t. $k > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{k} < \varepsilon$

则 $\forall n > k (a_n \in B(a, \frac{1}{n})) \Rightarrow |a_n - a| < \frac{1}{n} < \frac{1}{k} < \varepsilon$

$\Rightarrow a_n \rightarrow a$. ▣

Rem. Prop 3.1(i) 给出了序列极限的等价定义, 它也是一般拓扑空间中序列极限的定义. 但一般拓扑空间的序列极限未必唯一 (不同于 Prop 3.2).

Prop 3.2 序列极限唯一

若 $a_n \rightarrow a$ 且 $a_n \rightarrow a'$, 则 $a = a'$.

Proof. 由定义, $\forall \varepsilon > 0$:

$\exists N_1 \in \mathbb{N} \forall n > N_1 (|a_n - a| < \varepsilon)$;

$\exists N_2 \in \mathbb{N} \forall n > N_2 (|a_n - a'| < \varepsilon)$.

取 $n > \max\{N_1, N_2\}$, 则:

$$|a - a'| \leq |a - a_n| + |a_n - a'| < 2\varepsilon.$$

由 ε 的任意性得 $a = a'$. ▣

Lem 3.3 序列的有限项差异不影响极限

设序列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N (a_n = b_n)$, 则 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 敛散性相同, 且收敛时 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Proof. 由定义易证.

Prop 3.4 收敛序列有界

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $\exists m \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} (|a_n| \leq m)$

Proof. 取 $\varepsilon > 0$, 则 $\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N (|a_n - a| < \varepsilon)$

$$\Rightarrow |a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < \varepsilon + |a|$$

设 $m = \max\{|a_1|, \dots, |a_n|, \varepsilon + |a|\}$.

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} (|a_n| \leq m) \Rightarrow \{a_n\}$ 有界.

Prop. 3.5 极限运算法则

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, 则:

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$

ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

iii) $\forall c \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot a$

iv) 若 $\forall n \in \mathbb{N} (b_n \neq 0)$ 且 $b \neq 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{a_n}{b_n}) = \frac{a}{b}$.

Proof. i) 由定义, $\forall \varepsilon > 0$:

$\exists N_1 \in \mathbb{N} \forall n > N_1 (|a_n - a| < \varepsilon)$ 且

$\exists N_2 \in \mathbb{N} \forall n > N_2 (|b_n - b| < \varepsilon)$.

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则

$$\forall n > N (|(a_n + b_n) - (a + b)| < |a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon)$$

于是 $\forall \varepsilon' > 0$ 令 $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2}$

$$\Rightarrow \forall n > N (|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon')$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$$

ii) 类似地, 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, $\forall n > N$:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |(a_n - a)(b_n - b) + a(b_n - b) + b(a_n - a)| \\ &< |a_n - a| \cdot |b_n - b| + |a| \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| \\ &< \varepsilon^2 + |a| \varepsilon + |b| \varepsilon \end{aligned}$$

于是 $\forall \varepsilon' > 0$ 令 $\varepsilon < \min\{1, \frac{\varepsilon'}{1+|a|+|b|}\}$

$$\forall n > N (|a_n b_n - ab| < \varepsilon^2 + |a| \varepsilon + |b| \varepsilon < \varepsilon(1+|a|+|b|) < \varepsilon')$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

iii) 取 $b_n = c$ (常数列), 应用(ii)的结论

iv) 只要证 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{b_n}) = \frac{1}{b}$, 后应用(ii)的结论:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \Rightarrow \text{取 } \varepsilon = \frac{|b|}{2}, \text{ 由定义 } \exists N_1 \in \mathbb{N} \forall n > N_1 : \\ |b_n - b| < \frac{|b|}{2} \Rightarrow |b| = |b - b_n + b_n| < |b_n - b| + |b_n| \\ < \frac{|b|}{2} + |b_n|$$

$$\Rightarrow |b_n| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}.$$

$$\text{又 } \forall \varepsilon > 0 \exists N_2 \in \mathbb{N} \forall n > N_2 (|b_n - b| < \varepsilon)$$

$$\text{取 } N = \max\{N_1, N_2\}. \forall n > N :$$

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - b_n}{b_n b} \right| < \frac{|b_n - b|}{|b| \cdot |b_n|} < \frac{\varepsilon}{|b| \cdot |b|/2} = \frac{2}{|b|^2} \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon' > 0, \text{ 取 } \varepsilon = \varepsilon' \cdot \frac{|b|^2}{2}$$

$$\forall n > N (| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} | < \frac{2}{|b|^2} \varepsilon = \varepsilon') \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{b_n}) = \frac{1}{b}.$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot \frac{1}{b_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Lem 3.6 极限保持序关系

若 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足 $\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N (a_n \leq b_n)$, 且均收敛;

$$\text{则 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Proof: 假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

$$\text{取 } \varepsilon = \frac{a-b}{2}, \text{ 由定义}$$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \forall n > N_1 (|a_n - a| < \varepsilon);$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \forall n > N_2 (|b_n - b| < \varepsilon).$$

$$\text{令 } N_0 = \max\{N, N_1, N_2\}.$$

$$\Rightarrow a - \varepsilon < a_n \leq b_n < b + \varepsilon \Rightarrow a - b < 2\varepsilon = a - b. \text{ 矛盾.}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Rem 该引理把 " $\leq$ " 换成 " $<$ " 时不成立.

考虑 $a_n = 0, b_n = \frac{1}{n}$. 有 $\forall n \in \mathbb{N}_+, (a_n < b_n)$ 而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

Thm 3.7 Sandwiching 定理.

若序列满足 $\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N (a_n \leq b_n \leq c_n)$ 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = m, \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = m.$$

Proof: $\forall \varepsilon > 0$:

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \forall n > N_1 (|a_n - m| < \varepsilon);$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \forall n > N_2 (|c_n - m| < \varepsilon).$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则 $\forall n > N$:

$$m - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < m + \varepsilon$$

$$\Rightarrow |b_n - m| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = m.$$

Def. 无穷大 Infinity

有一类特殊的发散序列值得注意.

若实数列 $\{a_n\}$ 满足 $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N (a_n > \varepsilon)$,

则称 $\{a_n\}$ 趋于正无穷, 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

类似地, 若 $\forall \varepsilon < 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N (a_n < \varepsilon)$, 则记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

Rem. 极限为 $\pm\infty$ 的序列仍是发散序列, 即极限不存在.

Def. 扩展实数集 $\mathbb{R}^* = [-\infty, +\infty]$. Extended Real Numbers

为了叙述方便, 有时我们扩展实数: $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

定义加法: $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$x + \infty = \infty, x - \infty = -\infty; +\infty + \infty = \infty; -\infty - \infty = -\infty.$$

乘法: $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$x \cdot \infty = \operatorname{sgn}(x) \cdot \infty; x \cdot (-\infty) = -\operatorname{sgn}(x) \cdot \infty.$$

序关系: $\forall x \in \mathbb{R}: -\infty < x < +\infty$.

在 $\mathbb{R}^*$ 上无穷大没有消去律; $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty \cdot 0$ 无定义.

除法: $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: \frac{x}{0} = \operatorname{sgn}(x) \cdot \infty; \frac{x}{\pm\infty} = 0$.

Rem. 在 $\mathbb{R}^*$ 的约定下, 极限运算法则可扩展到包含无穷大的情况.

Rem. 若 $E \subset \mathbb{R}$ 无上界, 则记 $\sup E = +\infty$;

若 $E \subset \mathbb{R}$ 无下界, 则记 $\inf E = -\infty$.

特殊地, $\sup \emptyset = -\infty$; $\inf \emptyset = +\infty$.

§ 3.2 极限的存在性

Def. 子序列 Subsequences

对序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 考虑一个自然数序列 $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$, $n_1 < n_2 < \dots$

称 $\{a_{n_i}\}$ 是 $\{a_n\}$ 的一个子列.

正式地, 子列 $\{a_{n_i}\}$ 是复合映射 $\alpha \circ f: \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, 其中 $f: \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$ 严格递增, $\alpha: \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ 是母列 $\{a_n\}$.

Prop. 3.8 收敛序列的子列

- i) 若 $a_n \rightarrow a$, 则 $\{a_n\}$ 的每个子列 $\{a_{n_i}\}$ 都收敛到 a .
- ii) 若 $\{a_n\}$ 有子列收敛到 a 与 a' , 且 $a \neq a'$, 则 $\{a_n\}$ 发散.

Proof: i) 由定义 $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$:

$$\forall n > N (|a_n - a| < \varepsilon) \Rightarrow \forall n_i > N (|a_{n_i} - a| < \varepsilon)$$

由于 $i \mapsto n_i$ 是严格递增的, $n_i > i$

$$\Rightarrow \forall i > N (|a_{n_i} - a| < \varepsilon) \Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} a_{n_i} = a$$

ii) 由 (i) 与极限的唯一性立得. ▢

Thm 3.9 Bolzano - Weierstrass 子列收敛定理

有界序列必有收敛子列.

Proof: 设 $\{a_n\}$ 有界, 则 $\{a_n\}$ 的值域 E 是有界集.

Case 1: E 是有限集.

显然存在 $p \in E$ 与 $n_1, n_2, \dots \in \mathbb{N}_+$ s.t. $a_{n_1} = a_{n_2} = \dots = p$.

否则 E 必不有限.

于是 $\lim_{i \rightarrow \infty} a_{n_i} = p$ ($\{a_{n_i}\}$ 是常数列)

Case 2: E 是无限集.

由 Bolzano - Weierstrass 极限点存在定理, 有界无限集 E 有极限点

$p \in \mathbb{R}$. 由 Prop 3.1.(ii), 存在 $\{b_n\} \subset E$ 收敛到 p .

且 $\{b_n\}$ 是 $\{a_n\}$ 的子列:

$$b_1 = a_{n_1} \text{ 满足 } |a_{n_1} - p| < 1;$$

$$b_i = a_{n_i} \text{ 满足 } n_i > n_{i-1} \text{ 且 } |a_{n_i} - p| < i^{-1}.$$

于是 $\{a_n\}$ 必有收敛子列. □

Def. Cauchy 序列 Cauchy Sequences

实数列 $\{a_n\}$ 若满足 $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n > N (|a_m - a_n| < \varepsilon)$

则称为 Cauchy 序列.

Thm 3.10 Cauchy 收敛准则

实数列收敛, 当且仅当它是 Cauchy 列.

Proof: " $\Rightarrow$ ": 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 由定义 $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$

$$\forall m > N (|a_m - a| < \varepsilon), \forall n > N (|a_n - a| < \varepsilon)$$

$$\Rightarrow |a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a - a_n| < 2\varepsilon$$

$\Rightarrow \{a_n\}$ 是 Cauchy 列

" $\Leftarrow$ ": Step 1: Cauchy 列有界.

若 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 列, 固定某个 $\varepsilon > 0$

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall m, n > N (|a_m - a_n| < \varepsilon)$$

固定某个 $m > N$, 则 $\forall n > m (|a_n - a_m| < \varepsilon)$

$$\Rightarrow \forall n > m (|a_n| < |a_m| + \varepsilon)$$

$$\text{令 } k = \max\{|a_1|, \dots, |a_m|, |a_m| + \varepsilon\}.$$

易见 $\forall n \in \mathbb{N}_+ (|a_n| \leq k) \Rightarrow \{a_n\}$ 有界.

Step 2: 由 Thm 3.9, $\{a_n\}$ 有收敛子列 $a_{n_i} \rightarrow \alpha$.

由定义, $\forall \varepsilon > 0$:

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \forall m, n > N_1 (|a_m - a_n| < \varepsilon)$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \forall i > N_2 (|a_{n_i} - \alpha| < \varepsilon).$$

取 $N_0 = \max\{N_1, N_2\}$, $\forall n > N_0$:

$$|a_n - \alpha| \leq |a_n - a_{n_i}| + |a_{n_i} - \alpha| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$. Cauchy 序列收敛. 

Rem. 截至此处, 本章所有关于序列的定义与定理可以直接推广到 $\mathbb{C}$ 甚至 $\mathbb{R}^n$. 因为没有涉及任何序关系, 仅用到了完备度量空间的性质.

Rem. 一般地, 若度量空间中任意 Cauchy 序列都收敛, 则称之为完备度量空间. $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ 与 $\mathbb{R}^n$ 作为度量空间都是完备的.

Thm* 3.11 相互等价的六大实数域完备公理.

设 $\mathbb{R}$ 是序域 (满足 §2.4 的 $P1 \sim P15$), 则下列表述等价:

- i) (Dedekind 完备性/确界存在原理) $\mathbb{R}$ 的上有界子集必有上确界;
- ii) (Cantor 闭区间套) 设闭区间序列 $I_n := [a_n, b_n]$ 满足 $I_1 \supset I_2 \supset \dots$, 则 $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$;
- iii) (Heine-Borel 有限覆盖) $\mathbb{R}$ 的有界闭集是紧集.
i.e. 有界闭集的任意开覆盖都有有限子覆盖;
- iv) (Bolzano-Weierstrass 聚点存在) $\mathbb{R}$ 上的有界无限集存在极限点;
- v) (Bolzano-Weierstrass 收敛子列) $\mathbb{R}$ 的有界闭集是列紧集.
i.e. 有界序列必有收敛子列;
- vi) (Cauchy 完备性) Cauchy 序列都收敛, 加上:
(Archimedes 性) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ 无上界.

Rem. 用 (ii) ~ (vi) 代替 (i) 作为实数域的完备性公理, 可以导出其余所有性质.

Proof of 3.11: 在前述章节中我们已经完成了大部分证明:

(i) $\Rightarrow$ (ii) 定理 [2-39]

(ii) $\Rightarrow$ (iii) 定理 [2-44]

(iii) $\Rightarrow$ (iv) 定理 [2-46]

(iv) $\Rightarrow$ (v) 定理 [3-9]

(v) $\Rightarrow$ (vi) Cauchy 完备性见定理 [3-10]

Bolzano - Weierstrass 推 Archimedes 性 :

考虑自然数列 $a_n = n$. 假设 $\mathbb{R}$ 不满足 Archimedes 性,

即 $\exists \lambda \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} (\lambda \geq n)$. 则 $\{a_n\}$ 有界.

由 Bolzano - Weierstrass, $\{a_n\}$ 有收敛子列 $\{a_{n_i}\}$.

由 Thm 3.10 的证明, $\{a_{n_i}\}$ 是 Cauchy 列.

即 $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall i, j > N (|n_i - n_j| < \varepsilon)$.

由于 $a_{n_i} \in \mathbb{N}$, $i \neq j \Rightarrow |n_i - n_j| \geq 1$.

取 $\varepsilon < 1$ 即得矛盾. 即 $\{a_n\}$ 无界, $\mathbb{R}$ 有 Archimedes 性.

(vi) $\Rightarrow$ (i): 设 $E \subset \mathbb{R}$ 有上界, 记 E 的全体上界为 $\mathcal{U}(E)$.

取 $x_0 \in E$, $y_0 \in \mathcal{U}(E) \setminus E$. 有 $y_0 > x_0$.

给定 $x_n \in E$, $y_n \in \mathcal{U}(E)$:

若 $\frac{1}{2}(x_n + y_n) \in \mathcal{U}(E)$, 则令 $x_{n+1} = x_n$, $y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n)$;

若 $\frac{1}{2}(x_n + y_n) \notin \mathcal{U}(E)$, 则 $\exists p \in E (p > \frac{1}{2}(x_n + y_n))$,

令 $x_{n+1} = p$, $y_{n+1} = y_n$.

于是我们归纳地构造了递增列 $\{x_n\} \in E$ 和递减列 $\{y_n\} \in \mathcal{U}(E)$

且满足 $y_{n+1} - x_{n+1} \leq \frac{1}{2}(y_n - x_n) \Rightarrow y_n - x_n \leq \frac{1}{2^n}(y_0 - x_0)$.

对 $\varepsilon > 0$, 由 Archimedes 性, $\exists N \in \mathbb{N} (N > \log_2 \frac{y_0 - x_0}{\varepsilon})$

$\Rightarrow \forall n > N (\frac{1}{2^n}(y_0 - x_0) < \frac{1}{2^N}(y_0 - x_0) < \varepsilon)$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n}(y_0 - x_0) = 0$

$\Rightarrow 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n}(y_0 - x_0) = 0$

$\{y_n - x_n\}$ 收敛到 0.

由 $\forall m, n \in \mathbb{N} (x_m \leq y_n)$, 有:

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m > n > N (x_m - x_n < y_n - x_n < \varepsilon)$.

即 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 同理 $\{y_n\}$ 是 Cauchy 列.

由于Cauchy序列收敛, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$.

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 + L = L.$$

接下来只要证 $L = \sup E$:

a) 假设 $L \notin \mathcal{U}(E)$, 则 $\exists q \in E (q > L)$. 令 $\varepsilon = q - L > 0$.

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} (|y_k - L| = y_k - L < \varepsilon) \Rightarrow y_k < q.$$

与 $y_k \in \mathcal{U}(E)$ 矛盾.

b) 假设 L 非 $\mathcal{U}(E)$ 的最小元, 即 $\exists L' \in \mathcal{U}(E) (L' < L)$.

$$\text{令 } \varepsilon = L' - L > 0 \Rightarrow \exists s \in \mathbb{N} (|x_s - L| = L - x_s < \varepsilon)$$

$$\Rightarrow x_s > L', \text{ 与 } L' \in \mathcal{U}(E) \text{ 矛盾.}$$

综上, 对非空 $E \subset \mathbb{R}$, 必存在 $L = \sup E \in \mathbb{R}$. ▀

Exm 3.12. Cauchy完备但非Dedekind完备的序域.

$$\text{令 } F := \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n x^n \mid a_n \in \mathbb{R}; \exists N \in \mathbb{Z} \forall n < N (a_n = 0) \right\}$$

为 $\mathbb{R}$ 上的形式Laurent级数.

加法与乘法的定义与多项式相同. 序(正锥)的定义:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n x^n > 0 \Leftrightarrow a_k > 0 \text{ 其中 } k \text{ 是使 } a_k \neq 0 \text{ 的最小整数.}$$

可以验证(相对困难) F 是Cauchy完备的序域.

但 t^{-1} 是 NCF 的一个上界 (这里的 NCF 恰好就是 $N \subset \mathbb{R}$)

即 F 不满足Archimedes性, F 非Dedekind完备.

Def. 单调序列 Monotonic Sequences:

实数列 $\{x_n\}$ 称为:

i) 单调递增的, 若 $\forall n \in \mathbb{N}_+ (x_n \leq x_{n+1})$

ii) 单调递减的, 若 $\forall n \in \mathbb{N}_+ (x_n \geq x_{n+1})$

iii) 严格递增的, 若 $\forall n \in \mathbb{N}_+ (x_n < x_{n+1})$

iv) 严格递减的, 若 $\forall n \in \mathbb{N}_+ (x_n > x_{n+1})$

Rem. 单调性是序域上的独特性质, 因此后述定理不能推广到 $\mathbb{C}$ 或 $\mathbb{R}^n$.

Thm. 3.13 观景点定理.

实数列必有单调子列.

Proof: 考虑实数列 $\{a_n\}$ 和集合 $V := \{k \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N} (n > k \Rightarrow a_n < a_k)\}$

V 即“观景点”的集合, V 至多可数.

i) V 是可数集.

把 V 写成递增序列 $k_1 < k_2 < \dots$, 则子列 $\{a_{k_i}\}$ 满足

$\forall i, j \in \mathbb{N}_+ (i < j \Rightarrow k_i < k_j \Rightarrow a_{k_i} > a_{k_j})$.

于是 $\{a_{k_i}\}$ 是 $\{a_n\}$ 的递减子列.

ii) V 是有限集.

令 $N \in \mathbb{N}$ s.t. $N > \max V$. $n_1 := N$. 对 $n_k \geq N$,

$\exists n_{k+1} \in \mathbb{N} (n_{k+1} > n_k \wedge a_{n_{k+1}} \geq a_{n_k})$. 于是我们归纳地得到了递增子列 $\{a_{n_k}\}$

Thm. 3.14 单调有界定理

若实数列 $\{a_n\}$ 单调递增(递减), 则 $\{a_n\}$ 收敛当且仅当 $\{a_n\}$ 有上界(下界).

Proof: Prop 3.4 已证收敛序列有界.

若递增序列 $\{a_n\}$ 有上界, 则 $\{a_n\}$ 有上确界. 设 $s = \sup \{a_n\}$.

取 $\varepsilon > 0$, 则 $\exists N \in \mathbb{N} (s - \varepsilon < a_N \leq s)$. 若不然, 则 $s - \varepsilon$ 也是 $\{a_n\}$ 的上界, 与 s 是上确界矛盾.

由于 $\{a_n\}$ 递增, $\forall n > N (s - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq s)$

$\Rightarrow |a_n - s| < \varepsilon$. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s$.

递减序列的证明类似.

Rem. Bolzano-Weierstrass 收敛子列定理可以由 Thm 3.13 + Thm 3.14 直接推出.

Lem. 3.15 若实数列 $\{a_n\}$ 单调递增(递减), 且 $\{a_n\}$ 无上界(下界), 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \text{ } (-\infty).$$

Proof: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq +\infty \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N}_+ \exists n > N (a_n \leq \varepsilon)$

由 $\{a_n\}$ 递增, $\exists \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N}_+ \forall n \leq N (a_n \leq \varepsilon)$

$\Rightarrow \varepsilon$ 是 $\{a_n\}$ 的上界. 矛盾.

$\{a_n\}$ 递减同理. ▣

Exm. 3.16 $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ 收敛.

Proof: 首先证明 $\{a_n\}$ 有界:

$$\begin{aligned} \text{由二项式定理, } a_n &= (1 + \frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\frac{1}{n})^k \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k! n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})\cdots(1 - \frac{k-1}{n}) \\ &\leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + 2 - \frac{1}{2^n} < 3 \end{aligned}$$

其次, $\{a_n\}$ 递增:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} (1 - \frac{1}{n+1}) \cdots (1 - \frac{k-1}{n+1}) \\ &> \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (1 - \frac{1}{n+1}) \cdots (1 - \frac{k-1}{n+1}) \\ &> \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (1 - \frac{1}{n}) \cdots (1 - \frac{k-1}{n}) = a_n. \end{aligned}$$

由单调有界定理, $\{a_n\}$ 收敛. ▣

Rem 下节将会看到, a_n 的极限就是 e .

Def. 上/下极限 Upper/Lower Limits

实数列 $\{a_n\}$ 的上极限定义为

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{k \rightarrow \infty} (\sup_{n \geq k} a_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \{a_n | n \geq k\}$$

下极限定义为

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{k \rightarrow \infty} (\inf_{n \geq k} a_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf \{a_n | n \geq k\}$$

Rem. 由于 $\{a_n | n \geq k\} \supset \{a_n | n \geq k+1\}$,

$$\text{有 } \sup_{n \geq k} a_n \geq \sup_{n \geq k+1} a_n; \quad \inf_{n \geq k} a_n \leq \inf_{n \geq k+1} a_n.$$

即序列 $\sup_{n \geq k} a_n, \inf_{n \geq k} a_n$ 单调, 其极限(在扩展实数 $\mathbb{R}^*$ 中)总存在.

i.e. 无论 $\{a_n\}$ 是否收敛, $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n, \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ 都存在(可能是 $\pm\infty$).

Prop. 3.17 对实数列 $\{a_n\}$,

i) $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$

ii) $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ 当且仅当 $\{a_n\}$ 有极限, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 与它们相等. (可以是 $\pm\infty$)

Proof: i) $\forall k \in \mathbb{N}_+ \{ \sup \{a_n | n \geq k\} \geq \inf \{a_n | n \geq k\} \}$

由 Lemma 3.6, $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$.

ii) " $\Rightarrow$ " 设 $\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \neq \pm\infty$

$$\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_1 \in \mathbb{N} \forall k > N_1, \left(\sup_{n \geq k} a_n - \alpha < \varepsilon \right)$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_1 \in \mathbb{N} \forall n > N_1, (a_n < \alpha + \varepsilon)$$

同理, $\alpha = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_2 \in \mathbb{N} \forall n > N_2, (a_n > \alpha - \varepsilon)$$

$$\text{取 } N = \max\{N_1, N_2\} \Rightarrow \forall n > N, (|a_n - \alpha| < \varepsilon)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

若 $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall k > N, \left(\inf_{n \geq k} a_n > \varepsilon \right)$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N, (a_n > \varepsilon)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty. \quad (-\infty \text{ 同理})$$

" $\Leftarrow$ " 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \neq \pm\infty$

由定义 $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N, (|a_n - \alpha| < \varepsilon)$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall k > N, \left(\sup_{n \geq k} a_n < \alpha + \varepsilon \right)$$

$$\Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \alpha \quad \text{同理} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \alpha$$

又由 (i), $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$

$$\Rightarrow \alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$$

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

由定义 $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N, (a_n > \varepsilon)$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall k > N (\inf_{n \geq k} a_n > \varepsilon)$$

$$\Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

($-\infty$ 同理)

Prop 3.18 若 $\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N (a_n \leq b_n)$, 则有:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n; \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n$$

(上下极限保持序关系)

Proof: 对 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都有界的情况:

$$\forall n > N (a_n \leq b_n) \Rightarrow \forall k > N (\sup_{n \geq k} a_n \leq \sup_{n \geq k} b_n)$$

$$(\text{若不然, 则 } \exists m > N (a_m > \sup_{n \geq k} b_n) \Rightarrow \forall n > N (a_m > b_n))$$

$$\Rightarrow a_m > b_m, \text{ 矛盾.})$$

$$\Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \quad \text{同理} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n$$

其它情况懒得写了...差不多 $\mathbb{I} \cup \mathbb{I} \dots$

Rem 上下极限用于证明命题时可避免繁琐的 ε - N 语言.

如 Thm 3.7 Sandwiching 定理的证明:

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \text{ 存在且等于 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Prop. 3.19 上、下极限与子列的极限.

设 $E \subset \mathbb{R}^*$ 是 $\{a_n\}$ 的所有子列的极限值的集合, 则:

$$i) \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n, \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \in E.$$

$$ii) \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup E, \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf E.$$

有文献将(ii)作为上下极限的定义.

Proof: 设 $\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \neq \pm \infty$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N (a_n < \alpha + \varepsilon)$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \{a_n \in \mathbb{R} \mid a_n \geq \alpha + \varepsilon\} \text{ 是有限集.}$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$, 不存在子列收敛到 $\alpha + \varepsilon$ (否则 $\{a_n \in \mathbb{R} \mid a_n \geq \alpha + \varepsilon\}$ 是无限集). 即 α 是 E 的一个上界.

另外, $\forall \varepsilon > 0 (\{a_n \in \mathbb{R} \mid |a_n - \alpha| < \varepsilon\} \text{ 是无限集})$

由 [2-45], α 是 $\{a_n\}$ 的一个极限点.

由 Proposition 3.1.(ii), 存在子列收敛到 α

$\Rightarrow \alpha \in E. \Rightarrow \alpha = \sup E$.

(对 $\alpha = \pm\infty$ 的情况略去...)

同理, $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \in E, \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf E$.

Rem $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n, \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ 是 $\{a_n\}$ 最大, 最小的极限点.

§3.3 级数

Def. 部分和, 级数 Partial Sum, Series

对序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 定义部分和

$$S_n := a_1 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i.$$

若部分和序列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛, 则称级数 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ 收敛.

并记 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i =: \sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

Thm 3.20 级数的 Cauchy 准则

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 当且仅当 $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m > n > N (|\sum_{i=n}^m a_i| < \varepsilon)$.

Proof: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow S_n := \sum_{i=1}^n a_i$ 收敛

$\Leftrightarrow S_n$ 是 Cauchy 序列

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m > n > N (|S_m - S_n| < \varepsilon)$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m > n > N (|\sum_{i=n}^m a_i| < \varepsilon)$

Rem 取 $m = n$, 上式变为 $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N (|a_n| < \varepsilon)$, 即:

Lem 3.21 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Exm 3.22 几何级数

设 $x \in \mathbb{R}$, 考虑 $a_n = a_0 x^n$ ($a_0 \in \mathbb{R}$).

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i = \begin{cases} a_0 n, & x = 1 \\ a_0 x \cdot \frac{1-x^n}{1-x}, & x \neq 1 \end{cases}$$

于是当 $0 \leq x < 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; 当 $x \geq 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

Def. 正项级数 Series of Non-negative terms

若 $\forall n \in \mathbb{N}_+ (a_n \geq 0)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 称为正项级数.

Thm 3.23 正项级数收敛当且仅当其部分和序列有上界.

Proof: $\forall n \in \mathbb{N}_+ (a_n \geq 0) \Rightarrow S_n := \sum_{i=1}^n a_i$ 单调递增.

由单调有界定理, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \{S_n\}$ 收敛

$\Leftrightarrow S_n$ 有上界. □

Thm 3.24 比较判别法

i) 设 $\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N (|a_n| \leq b_n)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛蕴涵 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

ii) 设 $\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N (0 \leq a_n \leq b_n)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛蕴涵 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

Proof: i) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛 $\xrightarrow{\text{Cauchy 准则}} \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m > n > N (\sum_{i=n}^m b_i < \varepsilon)$

$$\text{而 } |\sum_{i=n}^m a_i| \leq \sum_{i=n}^m |a_i| \leq \sum_{i=n}^m b_i < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m > n > N (\sum_{i=n}^m a_i < \varepsilon)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛}$$

ii) 由 (i) 显然. □

Prop. 3.25 设 $\{a_n\}$ 是递减的非负序列, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛当且仅当

$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot a_{2^k} := a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \dots$ 收敛. (Cauchy 凝聚判别法)

Proof: 考虑部分和的有界性:

$$\text{设 } S_n := \sum_{i=1}^n a_i, \quad t_k := \sum_{j=0}^k 2^j a_{2^j}$$

$$\text{若 } n < 2^k, \text{ 则 } S_n \leq a_1 + (a_2 + a_3) + \dots + (a_{2^{k-1}} + \dots + a_{2^k-1})$$

$$\leq a_1 + 2a_2 + \dots + 2^k a_{2^k} = t_k.$$

若 $n > 2^k$, 则 $|S_n| \geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \dots + (a_{2^{k-1}+1} + \dots + a_{2^k})$
 $\geq \frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + \dots + 2^{k-1}a_{2^k}$
 $= \frac{1}{2}t_k. \Rightarrow 2S_n \geq t_k$

于是 $\{S_n\}$ 与 $\{t_k\}$ 有界性相同

由 Theorem 3.23, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ 的敛散性相同. ▣

Thm 3.26 调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

Proof: 由 Proposition 3.25, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 与 $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1$ 的敛散性相同, 而 $\sum_{k=0}^{\infty} 1$ 发散. ▣

Thm 3.27 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $\begin{cases} \text{收敛, 若 } p > 1 \\ \text{发散, 若 } p \leq 1 \end{cases}$

Proof: 同上.

Def. 自然常数 e .

定义 $e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \dots$

Rem. 设 $S_n := \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!}$

$$S_n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{2 \times 3 \times \dots \times n}$$

$$\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = 3 - \frac{1}{2^n} < 3.$$

部分和有界, 正项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ 收敛, 该定义是合理的.

Thm 3.28 $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$.

Proof: Example 3.16 已证 RHS 收敛.

设 $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$, $t_n = (1 + \frac{1}{n})^n$.

已证 $t_n = (1 + \frac{1}{n})^n \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = S_n$.

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} t_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = e$.

另一方面, 取 $m \leq n$

$$t_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \dots (1 - \frac{k-1}{n})$$

$$\geq \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \dots (1 - \frac{k-1}{n})$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} t_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = S_m$$

$$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}_+ \exists n \geq m (t_n \geq S_m)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} t_n \geq \lim_{m \rightarrow \infty} S_m = e.$$

$$\text{于是 } \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Rem e 是无理数的证明见 [2-27].

Rem 下节会定义指数函数 $\exp$ 并证明它与 e 的指数的相容性.

Thm 3.29 Leibniz 交错级数判别法

设 $\{a_n\}$ 是递减的非负序列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ 收敛.

Proof: 考虑部分和 $S_{2n} = \sum_{i=1}^{2n} (-1)^{i+1} a_i$

$$\text{一方面 } S_{2n} = a_1 - \sum_{i=1}^{n-1} (a_{2i} - a_{2i+1}) - a_{2n} \leq a_1.$$

$$\text{另一方面 } S_{2n} = \sum_{i=1}^n (a_{2i-1} - a_{2i}) \geq 0.$$

于是 S_{2n} 是单调有界序列, 设 $S_{2n} \rightarrow \alpha$.

$$\text{又 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = \alpha + 0 = \alpha.$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \alpha \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \text{ 收敛.}$$

Thm. 3.30 比较判别法, 极限形式.

设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是严格的正项序列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \alpha \in (0, +\infty)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛当且仅当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

Proof: 由定义, 取 $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$, $\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N (|\frac{a_n}{b_n} - \alpha| < \frac{\alpha}{2})$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N (\frac{\alpha}{2} b_n < a_n < \frac{3}{2} \alpha b_n)$$

$$\text{由 Thm 3.24, 有 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{2} b_n \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 收敛,}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\alpha}{2} b_n \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛.}$$

Thm. 3.31 d'Alembert 比例判别法

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛, 若 } \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1;$$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 若 $\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$.

Rem 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$, 比例判别法不能给出任何信息, 比如 $\sum \frac{1}{n}$ & $\sum \frac{1}{n^2}$.

Proof: i) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \Rightarrow \exists \delta < 1 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \left(\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \delta \right)$

$$\forall n \geq N: |a_{n+1}| < \delta |a_n|, |a_{n+2}| < \delta^2 |a_n|, \dots$$

$$\Rightarrow |a_n| < \delta^{n-N} |a_N| = |a_N| \delta^{-N} \cdot \delta^n$$

$\delta < 1$, 由 Example 3.22, 几何级数 $\sum \delta^n$ 收敛 $\Rightarrow \sum |a_n| \delta^{-N} \delta^n$ 收敛

$\Rightarrow$ 由 Thm 3.24, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

ii) $\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \left(\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \right)$

$\Rightarrow |a_n| \nrightarrow 0 \Rightarrow a_n \nrightarrow 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. □

Thm 3.32 Cauchy 根式判别法.

i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 若 $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} < 1$;

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 若 $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} > 1$;

Rem. 若 $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1$, 根式判别法不能给出任何信息.

Proof: i) $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} < 1 \Rightarrow \exists \delta < 1 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \left(|a_n|^{\frac{1}{n}} < \delta \right)$

$\Rightarrow |a_n| < \delta^n$. 由 Theorem 3.24, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

ii) 容易看出 $a_n \nrightarrow 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. □

Rem. 下面的定理表明根式判别法强于比例判别法, 尽管多数情况下比例判别法更好用..

Prop 3.33 设 $\{a_n\}$ 是严格的正项序列, 则有:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Proof: 只要证后半部分: $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

设 $\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}/a_n)$. $\alpha = +\infty$ 时上式显然.

若 $\alpha < +\infty$, 则 $\forall \beta > \alpha \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} < \beta \right)$.

仿照 Theorem 3.31 的证明, 我们有: $a_n < a_N \beta^{-N} \cdot \beta^n$.

$$\Rightarrow a_n^{\frac{1}{n}} < (a_N \beta^{-N})^{\frac{1}{n}} \cdot \beta \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_N \beta^{-N})^{\frac{1}{n}} \cdot \beta = \beta$$

上式对所有 $\beta > \alpha$ 成立. 即 $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n^n \leq \alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

对 $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n^n$ 的证明类似. ▢

Exm 3.34 考虑级数 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots$

$$\text{易得 } \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3^n} = 0$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3^n}\right)^{\frac{1}{2n}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^n}\right)^{\frac{1}{2n}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3^n}{2^n} = +\infty.$$

可见比例判别法无信息, 而根式判别法给出收敛.

Def. 绝对收敛 Absolute Convergence

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 称为绝对收敛, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛.

Prop. 3.35 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

Proof: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛 $\xrightarrow{\text{Cauchy 准则}} \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m > n > N \left(\sum_{i=n}^m |a_i| < \varepsilon \right)$
 $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m > n > N \left(\left| \sum_{i=n}^m a_i \right| < \sum_{i=n}^m |a_i| < \varepsilon \right)$
 $\xrightarrow{\text{Cauchy 准则}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. ▢

Rem 收敛的正项级数都是绝对收敛的.

Def. 条件收敛 Conditional Convergence

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛但不绝对收敛.

Def. 重排 Rearrangement

考虑正整数集上的双射 $f: \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$, 令 $b_n = a_{f(n)}$.

则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 称为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的一个重排.

Thm. 3.36 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的每个重排都收敛到同一个极限.

(绝对收敛的级数不受重排影响)

Proof: 设 $b_n = a_{f(n)}$ 是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的一个重排.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ 收敛} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \left(\sum_{i=N}^{\infty} |a_i| < \varepsilon \right).$$

考虑 $n = 1, \dots, N$ 在 f 下的像,

$$\exists p \geq N \forall n \leq N \exists m \leq p (m = f(n))$$

$\forall n \geq p: \left| \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n b_i \right|$ 中含 $\sum_{i=1}^n a_i$ 的项抵消掉了

$$\text{于是 } \left| \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n b_i \right| \leq \sum_{i=N}^{\infty} |a_i| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n b_i \right) = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Thm 3.37 Riemann 重排定理

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则对任意 $-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq +\infty$, 都存在 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的重排 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, s.t. $\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n b_i = \alpha$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n b_i = \beta$.

Proof: 设 $a_n^+ := \frac{|a_n| + a_n}{2}$, $a_n^- := \frac{|a_n| - a_n}{2}$ 是两个非负序列.

$$\Rightarrow a_n = a_n^+ - a_n^-; |a_n| = a_n^+ + a_n^-$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛} \Rightarrow a_n, |a_n| \rightarrow 0 \Rightarrow a_n^+, a_n^- \rightarrow 0$$

假设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 收敛, ① 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 收敛, 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛矛盾; ② 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 发散, 矛盾. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 发散, 同理 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 发散.

令 $\{p_n\}$ 为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中的非负项 (按原顺序, 下同), $\{q_n\}$ 为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中的负项的绝对值. 于是 $\{p_n\}$ 与 $\{a_n^+\}$, $\{q_n\}$ 与 $\{a_n^-\}$ 相差的只有一堆 0,

$$\text{自然有: } p_n, q_n \rightarrow 0 \text{ 以及 } \sum_{n=1}^{\infty} p_n, \sum_{n=1}^{\infty} q_n \rightarrow +\infty$$

我们从 $\{p_n\}, \{q_n\}$ 出发构造满足题意的重排:

设实数列 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \beta$, 且:

$$\forall n \in \mathbb{N}_+ (\alpha_n < \beta_n), \beta_1 > 0$$

令 m_1, k_1 是最小的整数 s.t. $\sum_{i=1}^{m_1} p_i > \beta_1$, $\sum_{i=1}^{m_1} p_i - \sum_{i=1}^{k_1} q_i < \alpha_1$;

给定 m_n, k_n , 令 m_{n+1}, k_{n+1} 是最小的整数 s.t.

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} p_i - \sum_{i=k_{j-1}+1}^{k_j} q_i \right) + \sum_{i=m_n+1}^{m_{n+1}} p_i > \beta_{n+1}, \quad (m_0, k_0 := 0)$$

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} p_i - \sum_{i=k_{j-1}+1}^{k_j} q_i \right) + \sum_{i=m_n+1}^{m_{n+1}} p_i - \sum_{i=k_n+1}^{k_{n+1}} q_i < \alpha_{n+1}$$

于是我们归纳地得到了序列 $\{m_n\}, \{k_n\}$ s.t. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n :=$

$$\sum_{i=1}^{m_1} p_i - \sum_{i=1}^{k_1} q_i + \sum_{i=m_1+1}^{m_2} p_i - \sum_{i=k_1+1}^{k_2} q_i + \dots \text{ 是 } \sum_{i=1}^{\infty} a_i \text{ 的重排}$$

(这个操作是合法的, 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n, \sum_{n=1}^{\infty} q_n \rightarrow +\infty$)

令 x_n, y_n 为末项等于 $p_{m_n}, -q_{k_n}$ 的部分和序列.

有 $x_n - \beta_n \leq p_{m_n}, \alpha_n - y_n \leq q_{k_n}$.

$\{p_{m_n}\}, \{q_{k_n}\}$ 是 $\{p_n\}, \{q_n\}$ 的子列, 而 $p_n, q_n \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - \beta_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_n - y_n| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \beta, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \alpha$$

$\Rightarrow$ 部分和序列 $\sum_{i=1}^n b_i$ 有子列收敛到 α, β .

若 $\beta = +\infty$, 则显然 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n b_i = \beta$; 若 $\beta < +\infty$, 则 $\forall \beta' > \beta$

$\{x_n | x_n > \beta'\}$ 是有限集 $\Rightarrow \{\sum_{i=1}^n b_i | \sum_{i=1}^n b_i \geq \beta'\}$ 是有限集.

不存在子列收敛到 β' . 即 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n b_i = \beta$.

同理 $\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n b_i = \alpha$.



Cor 3.38 (更常见的) Riemann 重排定理

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则对任意 $\alpha \in [-\infty, \infty]$, 存在 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的重排 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \alpha$.

Proof: 令 Theorem 3.37 的 $\alpha = \beta$.

§3.4 幂级数

Def. 幂级数 Power Series

给定序列 $\{c_n\} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, 形式级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 称为一个幂级数, 其中 c_n 称为系数, $z \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$.

Rem 一般来说, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的敛散性取决于 z 的取值, 下面的定理给出了一个粗略判定收敛区域的方法 (形式与 Cauchy 根式判别法相似)

Thm. 3.39 Cauchy - Hadamard 收敛半径公式

对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, 定义其收敛半径 $R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n}}$.

并约定: $\limsup_{n \rightarrow \infty} |C_n|^{\frac{1}{n}} = \begin{cases} 0 \\ +\infty \end{cases}$ 时, $R = \begin{cases} +\infty \\ 0 \end{cases}$.

则有: i) 若 $|z| < R$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ 绝对收敛;

ii) 若 $|z| > R$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ 发散.

Rem 和根式判别法类似, $|z| = R$ 时 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ 敛散性需要另行判断.

Proof: 对 $\sum C_n z^n$ 用根式判别法:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |C_n z^n|^{\frac{1}{n}} = |z| \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} |C_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{|z|}{R}$$

$\Rightarrow |z| < R$ 时 $\sum C_n z^n$ 收敛, $|z| > R$ 时 $\sum C_n z^n$ 发散.

特别地, 对 $\sum |C_n z^n|$ 用根式判别法能导出相同结果,

即 $|z| < R$ 时 $\sum C_n z^n$ 绝对收敛. ▣

Rem 在下-章我们将看到, $|z| < R$ 时 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ 还是一致收敛的 (Abel 第二定理)

Rem 对收敛半径为 R 的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$

($\mathbb{R}$ 上) $(z_0 - R, z_0 + R)$ 称为收敛区间;

($\mathbb{C}$ 上) $B(z_0, R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$ 称为收敛圆盘.

Rem $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处解析,

若 $\exists \varepsilon > 0 \forall x (|x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow \exists \{C_n\} (f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n))$

即 $f(x)$ 在 x_0 附近能展开成幂级数.

• 幂级数的乘法启发我们定义级数的乘积:

考虑级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, 定义它们 Cauchy 乘积的部分和序列:

$C_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ (与多项式乘法类似). 以下定理描述了级数的乘积运算. 在证明 Abel 定理后, 条件中的绝对收敛可以去掉.

Prop. 3.40 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 收敛, $C_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n$ 收敛, 且 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} b_n)$ (Mertens 定理)

Proof: 令 $A_n = \sum_{i=0}^n a_i$, $B_n = \sum_{i=0}^n b_i$, $C_n = \sum_{i=0}^n C_i$, 设 $A_n \rightarrow A$, $B_n \rightarrow B$.

只要证 $C_n \rightarrow AB$:

$$C_n = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i a_k b_{i-k} = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) + \dots + (a_0 b_n + \dots + a_n b_0)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=0}^n a_i B_{n-i} = \sum_{i=0}^n a_i (B_{n-i} - B) + \sum_{i=0}^n a_i B \\ &= \sum_{i=0}^n a_{n-i} \beta_i + A_n B \quad (\beta_i := B_i - B) \end{aligned}$$

我们知道 $A_n B \rightarrow AB$, 因此只要证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n a_{n-i} \beta_i = 0$:

取 $\varepsilon > 0$, 设 $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ (由于绝对收敛).

由 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$:

$\exists N_1 \in \mathbb{N} \forall n \geq N_1 (|a_n| < \varepsilon)$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (B_n - B) = 0$:

$\exists N_2 \in \mathbb{N} \forall n \geq N_2 (|\beta_n| < \varepsilon)$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$	$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$	$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$
收敛	收敛	发散或收敛到~
绝对收敛	收敛	收敛到~
绝对收敛	绝对收敛	绝对收敛到~

令 $N = N_1 + N_2$, $M = \max\{N_1, N_2\}$, 则 $\forall n > N$:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=0}^n a_{n-i} \beta_i \right| &\leq \left| \sum_{i=0}^M a_{n-i} \beta_i \right| + \left| \sum_{i=M+1}^n a_{n-i} \beta_i \right| \\ &\leq \varepsilon \sum_{i=0}^M |\beta_i| + \varepsilon \cdot \sum_{i=M+1}^n |a_{n-i}| \\ &\leq \varepsilon \left(\sum_{i=0}^M |\beta_i| + \alpha \right) \text{ 是一个常数.} \end{aligned}$$

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n a_{n-i} \beta_i = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = AB$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right)$



Prop 3.41 幂级数的运算.

设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ 的收敛半径为 R_1, R_2 , 令 $R := \min\{R_1, R_2\}$,

则当 $|z| < R$ 时,

i) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$ 绝对收敛

ii) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$, 其中 $C_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ 且 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ 绝对收敛.

Proof: i) $|(a_n + b_n) z^n| \leq |a_n z^n| + |b_n z^n|$

由比较判别法, $\sum_{n=0}^{\infty} |(a_n + b_n) z^n|$ 收敛. $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$ 绝对收敛.

ii) 设 $A = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$, $B = \sum_{n=0}^{\infty} |b_n z^n|$.

由Cauchy准则, $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m > n > N \left(\sum_{i=n}^m |a_i z^i| < \frac{\varepsilon}{B} \right)$

$\Rightarrow \sum_{i=n}^m |C_i z^i| = \sum_{i=n}^m \left| \sum_{k=0}^i a_k z^k \cdot b_{i-k} z^{i-k} \right| \leq \sum_{i=n}^m \sum_{k=0}^i |a_k z^k| \cdot |b_{i-k} z^{i-k}|$

$$\leq \sum_{i=n}^m |a_i z^i| \cdot B < \frac{\varepsilon}{B} \cdot B = \varepsilon$$

由Cauchy准则 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 绝对收敛



Rem. Proposition 3.41 (ii) 说明绝对收敛的级数的Cauchy积收敛, 而 Corollary 4.70 借助幂级数描述了收敛级数的Cauchy积.

Def. 指数函数 Exponential Functions

我们想定义 a^x ($a \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}$),

i) 当 $x \in \mathbb{N}$ 时, $a^0 := 1$, $a^x := a \cdot a^{x-1}$ ($x \geq 1$)

ii) 当 $x \in \mathbb{Z}^-$ 时, $a^x := \frac{1}{a^{-x}}$

iii) 当 $x \in \mathbb{Q}$ 时, $\exists p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}_+$ ($x = \frac{p}{q}$),

$y = a^x$ 定义为满足 $y^q = x^p$ 的唯一正实数.

iv) 当 $x \in \mathbb{R}$ 时, $a^x := \sup \{a^q \in \mathbb{R} \mid q \leq x \wedge q \in \mathbb{Q}\}$

Rem 容易验证 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ($a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; $(a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}$)

以及 $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $a > 1$ ($a^x \leq a^y \Leftrightarrow x \leq y$)

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$ ($a^x \leq a^y \Leftrightarrow x \geq y$)

Rem 以上定义在扩展到 $x \in \mathbb{C}$ 时会遇到困难, 因此我们寻求一个新定义.

Def. exp 函数.

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad (\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!})$$

Lem. 3.42 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ 的收敛半径 $R = +\infty$.

Proof: 这里用比例判别法更方便:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z^{n+1}/(n+1)!}{z^n/n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z|}{n+1} = 0, \text{ 对 } \forall z \in \mathbb{C}.$$

即 $\forall z \in \mathbb{C}$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ 绝对收敛, $R = +\infty$.



Rem 这说明 $\exp(z)$ 对整个复平面都是良定义的.

接下来我们验证 $\exp$ 具有指数函数最重要的性质:

Prop. 3.43 $\forall x, y \in \mathbb{C}$ ($\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$)

$$\text{Proof: } \exp(x) \cdot \exp(y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & \text{(由 Proposition 3.40)} & & = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} \\
 & \text{(由二项式定理)} & & = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \\
 & & & = \exp(x+y)
 \end{aligned}$$

· 我们注意到 $\forall x, y \in \mathbb{R} (x < y \Rightarrow \exp(x) < \exp(y))$, 由比较判别法, 即 $\exp$ 在 $\mathbb{R}$ 上是严格递增的.

$$\text{由 } \exp 0 = 1 = e^0; \exp 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e^1.$$

以及 $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$, 易得:

$$\forall x \in \mathbb{N} (\exp(x) = e^x).$$

$$\begin{aligned}
 \forall p, q \in \mathbb{N}_+, \exp(p/q)^q &= \exp(q \cdot \frac{p}{q}) = \exp(p) = e^p \\
 \Rightarrow \exp(p/q) &= e^{p/q}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{Q}_+ (\exp(x) = e^x).$$

$$\forall x \in \mathbb{Q}_- (\exp(x) = \exp(0) \cdot \exp(-x) = \frac{1}{e^{-x}} = e^x)$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{Q} (\exp(x) = e^x).$$

$$\begin{aligned}
 \forall x \in \mathbb{R} (e^x &= \sup \{e^r \in \mathbb{R} \mid r \leq x \wedge r \in \mathbb{Q}\} \\
 &= \sup \{\exp(r) \in \mathbb{R} \mid r \leq x \wedge r \in \mathbb{Q}\} = \exp(x)).
 \end{aligned}$$

由于 $\exp(x)$ 严格递增.

于是在 $\mathbb{R}$ 上, $\exp(x)$ 与 e^x 是相同的函数, 在此后不再区分两者.

即定义 $\forall z \in \mathbb{C} (e^z := \exp(z))$.

Rem 从指数函数出发, 我们可以把中学定义的三角函数扩展到复平面上:

Def. 三角函数 Trigonometric Functions

$$\text{对 } z \in \mathbb{C}, \text{ 正弦函数 } \sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\text{余弦函数 } \cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Thm 3.44 Euler 公式: $e^{iz} = \cos z + i \sin z$

Proof: 由定义立得. (这正是以上定义的 Motivation.)

Prop 3.45 正弦的 Maclaurin 级数表示

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\text{Proof: } e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^{4n}}{(4n)!} + i \cdot \frac{z^{4n+1}}{(4n+1)!} - \frac{z^{4n+2}}{(4n+2)!} - i \cdot \frac{z^{4n+3}}{(4n+3)!} \right)$$

$$e^{-iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^{4n}}{(4n)!} - i \cdot \frac{z^{4n+1}}{(4n+1)!} - \frac{z^{4n+2}}{(4n+2)!} + i \cdot \frac{z^{4n+3}}{(4n+3)!} \right)$$

$$\Rightarrow \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \quad (\text{绝对收敛, 重排一下})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^{4n}}{(4n)!} - \frac{z^{4n+2}}{(4n+2)!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^{4n+1}}{(4n+1)!} - \frac{z^{4n+3}}{(4n+3)!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Rem $\sin, \cos$ 在 $\mathbb{C}$ 上是绝对收敛的 (但其它三角函数不是)

• 三角函数的各种性质:

$$\text{Prop 3.46 } \sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

$$\text{Proof: } \sin^2 z + \cos^2 z = \left(\frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \right)^2 + \left(\frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \right)^2$$

$$= -\frac{1}{4}(e^{2iz} + e^{-2iz} - 2) + \frac{1}{4}(e^{2iz} + e^{-2iz} + 2)$$

$$= 1$$

$$\text{Prop 3.47 } \text{i) } \sin(-z) = -\sin z \quad \text{ii) } \cos(-z) = \cos z$$

$$\text{Proof: } \text{i) } \sin(-z) = \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i} = -\sin(z)$$

$$\text{ii) } \cos(-z) = \frac{e^{-iz} + e^{iz}}{2} = \cos(z)$$

Prop 3.48 两角和公式

$$\text{i) } \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\text{ii) } \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\text{Proof: } \text{i) } \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$= \frac{1}{4}(e^{ix} + e^{-ix})(e^{iy} + e^{-iy}) + \frac{1}{4}(e^{ix} - e^{-ix})(e^{iy} - e^{-iy})$$

$$= \frac{1}{2}(e^{ix}e^{iy} + e^{-ix}e^{-iy}) = \cos(x+y)$$

$$\text{ii) } \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$= \frac{1}{4i}(e^{ix} - e^{-ix})(e^{iy} + e^{-iy}) + \frac{1}{4i}(e^{ix} + e^{-ix})(e^{iy} - e^{-iy})$$

$$= \frac{1}{2i}(e^{ix}e^{iy} - e^{-ix}e^{-iy}) = \sin(x+y)$$

Def. 圆周率 π

设 $\cos x$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上的最小零点为 x_0 , 圆周率 $\pi := 2x_0$.

(在 §5. 会证明这个最小零点存在)

Rem 关于三角函数的更多性质将在 4~5 章逐步引入.

这里我们证明了复数极坐标表示的合理性:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Def. 双曲函数 Hyperbolic Functions

$$\text{对 } z \in \mathbb{C}, \text{ 双曲正弦 } \sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\text{双曲余弦 } \cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\text{Lem 3.49 } \sin(iz) = i \cdot \sinh(z), \cos(iz) = \cosh(z).$$

Proof: 由定义显然.

Lem 3.50 双曲函数的性质.

$$\text{i) } \sinh(-z) = -\sinh z, \cosh(-z) = \cosh z$$

$$\text{ii) } \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

$$\text{iii) } \cosh(x+y) = \cosh x \cdot \cosh y + \sinh x \cdot \sinh y$$

$$\text{iv) } \sinh(x+y) = \sinh x \cdot \cosh y + \cosh x \cdot \sinh y$$

Proof: 方法与三角函数类似, 略.

Cor 3.51 三角函数的直角坐标展开

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \sin(x+iy) = \sin x \cdot \cosh y + i \cos x \sinh y$$

$$\cos(x+iy) = \cos x \cdot \cosh y - i \sin x \sinh y$$

连续函数

91

§4.1 函数极限

- 为了引入函数极限, 我们回顾 $\mathbb{R}$ 上点集的极限点的定义:

设 $E \subset \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$ 是 E 的极限点 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists x \in E (0 < |x - p| < \varepsilon)$.

- 映射 $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 常被称为 (一元实) 函数.

Def. 函数极限 Limit of Functions

设 $E \subset \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$ 是 E 的极限点, 若:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E (0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)$$

则称 $f(x) \rightarrow A$ as $x \rightarrow p$, 记为 $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = A$ 或 (不引起混淆时) 简记为 $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = A$.

Rem 以上定义等价于: $\lim_{x \rightarrow p} f(x) \neq A \Leftrightarrow$

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in E (0 < |x - p| < \delta \wedge |f(x) - A| \geq \varepsilon)$$

Def. 去心 δ -邻域 Deleted δ -neighborhood

$$p \in \mathbb{R} \text{ 的去心 } \delta \text{-邻域 } \dot{U}^\delta(p) := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - p| < \delta\}$$

$$\text{对 } E \subset \mathbb{R}, \dot{U}_E^\delta(p) := E \cap \dot{U}^\delta(p).$$

Rem 极限的定义只要求 $\forall \delta > 0 (\dot{U}_E^\delta(p) \neq \emptyset)$, 而不要求 $\exists \delta > 0 (E \subset \dot{U}^\delta(p))$, 这点与国内教材不同.

Lem 4.1 用 δ -邻域与 ε -邻域可以得到函数极限的等价表述:

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (f[\dot{U}_E^\delta(p)] \subset U^\varepsilon(A))$$

其中 $U^\varepsilon(A) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - A| < \varepsilon\}$ 是不去心的邻域.

Rem 函数极限的定义还可以通过序列收敛刻画:

Prop 4.2 Heine 定理

设 $E \subset \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$ 是 E 的极限点, 则 $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = A$ 当且仅当

$$\forall \{x_n\} \subset E \setminus \{p\} (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A).$$

Proof: " $\Rightarrow$ " 由极限定义:

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E (0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)$$

而对 $\delta > 0, \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N (|x_n - p| < \delta)$

$$\Rightarrow \forall n > N (|f(x_n) - A| < \varepsilon) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$$

" $\Leftarrow$ " 若 $\lim_{x \rightarrow p} f(x) \neq A$, 则

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in E (0 < |x - p| < \delta \wedge |f(x) - A| > \varepsilon)$$

$$\text{取 } \delta_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \exists \{x_n\} \in E \setminus \{p\} (|x_n - p| < \delta_n \wedge |f(x_n) - A| > \varepsilon)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - p| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$$

$$\text{然而 } \liminf_{n \rightarrow \infty} |f(x_n) - A| \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \varepsilon = \varepsilon > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq A. \quad \square$$

Rem 有了函数极限的 Heine 定理, 关于序列极限的结论都可以搬到函数极限上:

Cor 4.3 函数极限唯一

若 $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = A_1$ 且 $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = A_2$, 则 $A_1 = A_2$.

Proof: 序列极限唯一 + Heine 定理

Cor 4.4 函数极限的运算法则

设 $f: E \rightarrow \mathbb{R}, g: E \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $p \in \mathbb{R}$ 有极限, $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow p} g(x) = b$.

$$\text{则: i) } \lim_{x \rightarrow p} (f + g)(x) = a + b$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow p} (fg)(x) = a \cdot b$$

$$\text{iii) 若 } b \neq 0, \lim_{x \rightarrow p} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{a}{b}.$$

Proof: 序列极限运算法则 + Heine 定理

Prop 4.5 极限局部保序性

设 $f: E \rightarrow \mathbb{R}, g: E \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $p \in \mathbb{R}$ 有极限, $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow p} g(x) = b$.

$$\text{i) 若 } a < b, \text{ 则 } \exists \delta > 0 \forall x \in \dot{U}_E^\delta(p) (f(x) < g(x))$$

$$\text{ii) 若 } \exists \delta > 0 \forall x \in \dot{U}_E^\delta(p) (f(x) \leq g(x)), \text{ 则 } a \leq b.$$

Proof: i) 取 $c \in \mathbb{R}$ s.t. $a < c < b$

$$\text{对 } \varepsilon = c - a > 0, \exists \delta_1 > 0 \forall x \in E (0 < |x - p| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - a| < c - a)$$

$$\text{对 } \varepsilon = b - c > 0, \exists \delta_2 > 0 \forall x \in E (0 < |x - p| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - b| < b - c).$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \Rightarrow \forall x \in E (0 < |x-p| < \delta \Rightarrow f(x) < c < g(x))$

ii) 序列极限保序性 + Heine 定理

Rem 函数 $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 有界, 是指 $f[E] \subset \mathbb{R}$ 有界.

Prop 4.6 极限局部有界性

设 $\lim_{E \ni x \rightarrow p} f(x) = A$, 则 $\exists M \geq 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \dot{U}_E^\delta(p) (|f(x)| \leq M)$

Proof: 取 $\varepsilon > 0$, 由定义 $\exists \delta > 0 \forall x \in \dot{U}_E^\delta(p) (|f(x) - A| < \varepsilon)$

$\Rightarrow |f(x)| \leq |f(x) - A| + |A| < |A| + \varepsilon$

Prop 4.7 Sandwiching 定理

设 $f: E \rightarrow \mathbb{R}, g: E \rightarrow \mathbb{R}, h: E \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $\forall x \in E (f(x) \leq g(x) \leq h(x))$, 且 $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} h(x) = A$, 则有 $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = A$.

Proof: 序列 Sandwiching 定理 + Heine 定理

Prop 4.8 函数极限的 Cauchy 准则

设 $E \subset \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}$ 是 E 的极限点, 则 $\lim_{E \ni x \rightarrow p} f(x)$ 存在 (且有限), 当且仅当 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in \dot{U}_E^\delta(p) (|f(x) - f(y)| < \varepsilon)$

Proof: 序列 Cauchy 准则 + Heine 定理

Rem 对 $f: E \rightarrow \mathbb{R}, F \subset E, \omega(f, F) := \sup_{x, y \in F} |f(x) - f(y)|$ 称为 f 在 F 上的振幅.

Thm 4.9 复合函数的极限

设 $g: E \rightarrow \mathbb{R}, f: g[E] \rightarrow \mathbb{R}$, 若:

i) $\lim_{E \ni x \rightarrow p} g(x) = u, \lim_{g[E] \ni x \rightarrow u} f(x) = A$

ii) $\exists \delta > 0 \forall x \in \dot{U}_E^\delta(p) (g(x) \neq u)$

则: $\lim_{E \ni x \rightarrow p} f \circ g(x) = A$.

Proof: 由 $\lim_{E \ni x \rightarrow p} g(x) = u, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 \forall x \in \dot{U}_{g[E]}^{\delta_1}(u) (|f(x) - A| < \varepsilon)$

取 $\delta_2 = \min\{\delta_1, \delta\}$ (δ 来自条件(ii))

$$\Rightarrow \forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_2}(p) (0 < |g(x) - u| < \varepsilon).$$

$$\text{由 } g[E] \ni x \rightarrow u \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow u} f(x) = A, \forall \varepsilon' > 0 \exists \delta' > 0 \forall g(x) \in g[E]:$$

$$0 < |g(x) - u| < \delta' \Rightarrow |f \circ g(x) - A| < \varepsilon'$$

$$\text{取 } \varepsilon = \delta': 0 < |x - p| < \delta_2 \Rightarrow 0 < |g(x) - u| < \delta'$$

$$\Rightarrow |f \circ g(x) - A| < \varepsilon'.$$

$$\text{即 } \lim_{x \rightarrow p} f \circ g(x) = A.$$



Rem 以上定理就是满足一定条件时, $\lim f(g(x)) = f(\lim g(x))$.

Def. 单侧极限 One-sided Limits

设 $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, p 是 E 的极限点.

左极限: $E \ni x \rightarrow p^- f(x) = f(p^-) = A$, 若:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E (0 < p - x < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)$$

右极限: $E \ni x \rightarrow p^+ f(x) = f(p^+) = A$, 若:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E (0 < x - p < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon).$$

Rem 易见, $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ 存在当且仅当左右极限存在且相等.

Rem 仿照序列的上下极限, 我们还可定义函数的左上、左下、右上、右下极限:

Def. Dini 极限 Dini Limits

$$\text{左上极限 } \overline{\lim}_{x \rightarrow p^-} f(x) = \limsup_{x \rightarrow p^-} f(x) := \inf_{\delta > 0} \left(\sup_{0 < p - x < \delta} f(x) \right)$$

$$\text{左下极限 } \underline{\lim}_{x \rightarrow p^-} f(x) = \liminf_{x \rightarrow p^-} f(x) := \sup_{\delta > 0} \left(\inf_{0 < p - x < \delta} f(x) \right)$$

$$\text{右上极限 } \overline{\lim}_{x \rightarrow p^+} f(x) = \limsup_{x \rightarrow p^+} f(x) := \inf_{\delta > 0} \left(\sup_{0 < x - p < \delta} f(x) \right)$$

$$\text{右下极限 } \underline{\lim}_{x \rightarrow p^+} f(x) = \liminf_{x \rightarrow p^+} f(x) := \sup_{\delta > 0} \left(\inf_{0 < x - p < \delta} f(x) \right)$$

Rem 一般有 $\liminf_{x \rightarrow p^-} f(x) \leq \limsup_{x \rightarrow p^-} f(x)$, $\liminf_{x \rightarrow p^+} f(x) \leq \limsup_{x \rightarrow p^+} f(x)$.

4个Dini极限相等时 $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ 才存在.

Def. 一些和无穷大有关的极限.

设 $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, p 是 E 的极限点,

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = +\infty, \text{ 若 } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E (0 < |x - p| < \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon)$$

$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = -\infty$, 若 $\forall \varepsilon < 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E (0 < |x - p| < \delta \Rightarrow f(x) < \varepsilon)$

设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 若 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x > \delta (|f(x) - A| < \varepsilon)$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$, 若 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta < 0 \forall x < \delta (|f(x) - A| < \varepsilon)$

Rem 在扩展实数 $\mathbb{R}^*$ 中处理极限, 每个定义都重写一遍非常麻烦, 事实上使用开区间/邻域的概念更加方便:

设 $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = A \Leftrightarrow \forall A$ 的邻域 $V(A) \exists p$ 的去心邻域 $\dot{U}(p) (\dot{U}_E(p) \neq \emptyset \wedge f[\dot{U}_E(p)] \subset V(A))$.

这里 p, A 都可以是 $\pm\infty$ (Lemma 4.1 的扩展版)

Thm 4.10 重要极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Proof: $\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} = 1 + x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2(n-1)}}{(2n+1)!}$

$\Rightarrow \left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| = |x|^2 \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2(n-1)}}{(2n+1)!} \right| \leq |x|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^{2(n-1)}}{(2n+1)!}$

当 $|x| < 1$ 时, $\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < |x|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} < |x|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = |x|^2 e$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| \leq \lim_{x \rightarrow 0} |x|^2 e = e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} |x|^2 = 0$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

PS: $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^2 = 0$ 的证明:

对 $\varepsilon > 0$, 取 $0 < \delta < \sqrt{\varepsilon}$, 则 $0 < |x| < \delta \Rightarrow 0 < |x| < \sqrt{\varepsilon}$

$\Rightarrow 0 < |x|^2 < \varepsilon$. 即 $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^2 = 0$. ▣

Rem. 对复数域 $\mathbb{C}$ 上的函数可以类似地定义极限 (形式完全相同)

§4.2 函数的连续性

Def. 连续性 Continuity

设 $E \subset \mathbb{R}$, $p \in E$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $x = p$ 处连续, 若:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E (|x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon)$

或, 用邻域的语言, $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (f[U_E^\delta(x)] \subset U^\varepsilon(f(p)))$.

Rem. 注意极限与连续性在定义上的细微差别:

$f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $p \in \mathbb{R}$ 有极限, 要求 p 是 E 的极限点;

$f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $p \in \mathbb{R}$ 连续, 要求 $p \in E$ (f 在 p 有定义).

从定义易见:

Lem 4.11 设 $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $p \in E$.

i) 若 p 是 E 的孤立点, 则 $f(x)$ 在 $x=p$ 连续.

ii) 若 p 是 E 的极限点, 则 $f(x)$ 在 $x=p$ 连续当且仅当 $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$.

Thm 4.12 连续性的拓扑刻画 (开集的逆像是开集)

设 $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)$ 在 E 上连续 (即在 E 上每个点都连续), 当且仅当 $\forall$ 开集 $U \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}[U]$ 在 E 中是开集.

Proof: " $\Rightarrow$ " 若 $f(x)$ 在 E 上连续, 取开集 $U \subset \mathbb{R}$.

若 $U \cap f[E] = \emptyset$, 则 $f^{-1}[U] = \emptyset$ 在 E 中是开集.

若 $U \cap f[E] \neq \emptyset$, 取 $p \in f^{-1}[U] \Rightarrow f(p) \in U$

U 是开集 $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ ($(f(p) - \varepsilon, f(p) + \varepsilon) \subset U$)

由连续性定义, $\exists \delta > 0$ ($(p - \delta, p + \delta) \cap E \subset f^{-1}[U]$)

$\Rightarrow p \in f^{-1}[U]$ 是 $f^{-1}[U]$ 的内点. 即 $f^{-1}[U]$ 的每个点都是内点, $f^{-1}[U]$ 是开集.

" $\Leftarrow$ " 取 $p \in E$, $\varepsilon > 0$. $f(p)$ 的邻域 $U^\varepsilon(f(p)) := (f(p) - \varepsilon, f(p) + \varepsilon)$ 是开集. 于是 $f^{-1}[U^\varepsilon(f(p))]$ 也是开集.

由 $p \in f^{-1}[U^\varepsilon(f(p))]$, $\exists \delta > 0$ ($U_\delta^\delta(p) \subset f^{-1}[U^\varepsilon(f(p))]$)

即 $\forall p \in E \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ ($f[U_\delta^\delta(p)] \subset U^\varepsilon(f(p))$).

于是 $f(x)$ 在 E 上处处连续. ▢

Rem 在一般拓扑空间中, 开集是比度量更基本的研究对象, Theorem 4.12 是拓扑空间之间的连续映射的基本定义 (开集的逆像是开集).

Cor 4.13 $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 在 E 上连续, 当且仅当 $\forall$ 闭集 $F \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}[F]$ 在

E 中是闭集.

Def. 单侧连续 One-sided Continuity

设 $E \subset \mathbb{R}$, $p \in E$ 是 E 的极限点, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $x=p$ 处:

i) 左连续, 若 $\lim_{E \ni x \rightarrow p^-} f(x) = f(p)$

ii) 右连续, 若 $\lim_{E \ni x \rightarrow p^+} f(x) = f(p)$

Rem 易见 $f(x)$ 在 $x=p$ 连续当且仅当它同时左右连续.

Def. 间断点 Points of Discontinuity.

若 $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $p \in E$ 不连续, 则 p 称为 $f(x)$ 的一个间断点.

i) 若 $\lim_{E \ni x \rightarrow p^-} f(x)$ 和 $\lim_{E \ni x \rightarrow p^+} f(x)$ 都存在, 则 p 称为第一类间断点

a) 若 $\lim_{E \ni x \rightarrow p} f(x)$ 存在 ($\lim_{E \ni x \rightarrow p^-} f(x) = \lim_{E \ni x \rightarrow p^+} f(x)$) 但 $\lim_{x \rightarrow p} f(x) \neq f(p)$,

则 p 称为可去 (removable) 间断点

b) 若 $\lim_{E \ni x \rightarrow p^-} f(x) \neq \lim_{E \ni x \rightarrow p^+} f(x)$, 则 p 称为跳跃 (jump) 间断点

ii) 若 $\lim_{E \ni x \rightarrow p^-} f(x)$ 或 $\lim_{E \ni x \rightarrow p^+} f(x)$ 不存在, 则 p 称为第二类间断点或本性 (essential) 间断点.

Exm 4.14 Thomae 函数

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 定义如下:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, p \in \mathbb{Z} \text{ 与 } q \in \mathbb{N} \text{ 互素} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上间断, 在 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 上连续.

Proof: i) 在 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 上连续:

设 $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow f(x_0) = 0$.

对 $\varepsilon > 0$, 取 $r \in \mathbb{N}$ s.t. $r > \frac{1}{\varepsilon}$.

由实数的 Archimedes 性, $\forall i=1, \dots, r \exists p_i \in \mathbb{Z} (\frac{p_i}{i} < x_0 < \frac{p_i+1}{i})$

定义 $\delta := \min_{1 \leq i \leq r} \{ |x_0 - \frac{p_i}{i}|, |x_0 - \frac{p_i+1}{i}| \}$,

即 $\forall x \in U_{\mathbb{Q}}^{\delta}(x_0) (x = \frac{p}{q} \Rightarrow q > r)$

即当 $|x - x_0| < \delta$ 时, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow |f(x)| = 0 < \varepsilon$

$x \in \mathbb{Q} \Rightarrow |f(x)| < \frac{1}{n} < \varepsilon$

于是 $f(x)$ 在 $x = x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 连续

ii) 在 $\mathbb{Q}$ 上间断:

设 $x_0 \in \mathbb{Q}$ s.t. $f(x_0) = \frac{1}{q}$ ($x_0 \neq 0$)

考虑 $0 < \varepsilon < \frac{1}{q}$, $\forall \delta > 0 \exists x' \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ($x_0 < x' < x_0 + \delta$)

而 $|f(x') - f(x_0)| = \frac{1}{q} > \varepsilon$, 于是 $f(x)$ 在 $x = x_0 \in \mathbb{Q}$ 间断. □

Note: 为了使 $f(x)$ 在 $x = 0$ 间断, 应该给 $f(0)$ 人为赋予一个非零值.

Rem 函数的连续点与间断点可以用如下的拓扑性质刻画:

Def. G_δ 集, F_σ 集.

G_δ 集是开集的可数交; F_σ 集是闭集的可数并

Note: $[2-41]$ 与 $[2-42]$ 表示了无限个开集的交 (闭集的并) 未必是开集 (闭集), 因此 G_δ 集与 F_σ 集是比开集与闭集更广的概念.

Prop. 4.15 $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 的连续点集是 G_δ 集, 间断点集是 F_σ 集.

Proof: 对 $n \in \mathbb{N}_+$, 定义 $A_n := \{x \in E \mid \exists \delta > 0 \forall s, t \in U_E^\delta(x) (|f(s) - f(t)| < \frac{1}{n})\}$.

我们要证每个 A_n 是开集, 且 $f(x)$ 的连续点集是 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

a) 考虑 $x_0 \in A_n$, 由定义 $\exists \delta > 0 \forall s, t \in U_E^\delta(x_0) (|f(s) - f(t)| < \frac{1}{n})$

取 $\delta' = \frac{\delta}{2} \Rightarrow \forall x \in U_E^{\delta'}(x_0) (U_E^{\delta'}(x) \subset U_E^\delta(x_0))$

$\Rightarrow \forall x \in U_E^{\delta'}(x_0) \forall s, t \in U_E^{\delta'}(x) (|f(s) - f(t)| < \frac{1}{n})$

$\Rightarrow \forall x \in U_E^{\delta'}(x_0) (x \in A_n)$

$\Rightarrow \forall x_0 \in A_n \exists \delta > 0 (U_E^\delta(x_0) \subset A_n)$ 即 A_n 是 E 中的开集.

b) 设 $f(x)$ 在 $p \in E$ 连续, 取 $\varepsilon = \frac{1}{2n}$, 由定义:

$\exists \delta > 0 \forall x \in U_E^\delta(p) (|f(x) - f(p)| < \frac{1}{2n})$

$\Rightarrow \forall s, t \in U_E^\delta(p) (|f(s) - f(t)| \leq |f(s) - f(p)| + |f(t) - f(p)|$

$< \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}) \Rightarrow p \in A_n$

注意 $n \in \mathbb{N}_+$ 的选取是任意的, 于是 $p \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

c) 设 $p \in E$ 满足 $p \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, 由 Archimedes 性

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}_+ \left(\frac{1}{n} < \varepsilon \right)$$

$$p \in A_n \Rightarrow \exists \delta > 0 \forall x \in U_E^\delta(p) (|f(x) - f(p)| < \frac{1}{n} < \varepsilon)$$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $p \in E$ 连续.

综上, $f(x)$ 的连续点集是 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, 可数个开集之交, 从而是 G_δ 集.

而 $f(x)$ 的间断点集是 $E \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \setminus A_n)$.

A_n 是开集 $\Rightarrow E \setminus A_n$ 是闭集 $\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \setminus A_n)$ 是 F_σ 集. ▣

Prop. 4.16 连续性的运算

若 $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ 都在 $p \in E$ 连续, 则

- i) $(f+g)(x)$ 在 $x=p$ 连续;
- ii) $(f \cdot g)(x)$ 在 $x=p$ 连续;
- iii) 若 $g(p) \neq 0$, 则 $(\frac{f}{g})(x)$ 在 $x=p$ 连续.

Proof: 若 p 是 E 的孤立点, 上述性质显然成立;

若 p 是 E 的极限点, 则 Corollary 4.4 + Lemma 4.11 立得.

Prop. 4.17 复合函数的连续性

设 $g: E \rightarrow \mathbb{R}$, $f: g[E] \rightarrow \mathbb{R}$, 若 $g(x)$ 在 $x=p$ 连续, $f(x)$ 在 $x=g(p)$ 连续, 则 $(f \circ g)(x)$ 在 $x=p$ 连续.

Proof: 取 $\varepsilon > 0$. f 在 $x=g(p)$ 连续, 即

$$\exists \eta > 0 \forall g(x) \in U_{g[E]}^\eta(g(p)) (|f(g(x)) - f(g(p))| < \varepsilon)$$

g 在 $x=p$ 连续, 对上述 $\eta > 0$, 有:

$$\exists \delta > 0 \forall x \in U_E^\delta(p) (|g(x) - g(p)| < \eta \Rightarrow g(x) \in U_{g[E]}^\eta(g(p)))$$

$$\text{于是 } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in U_E^\delta(p) (|f(g(x)) - f(g(p))| < \varepsilon)$$

即 $f \circ g$ 在 $x=p$ 连续 ▣

Exm 4.18 多项式函数 $p(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ 是 $\mathbb{C}$ 上的连续函数.

($\mathbb{C}$ 上函数极限 & 连续函数的定义与 $\mathbb{R}$ 完全一致)

Proof: 首先 $\forall a \in \mathbb{C}$, 常函数 $f(z) = a$ 显然是连续的.

其次正比例函数 $f(z) = z$ 在 $\mathbb{C}$ 上连续:

对 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon$, 有 $\forall z_0 \in \mathbb{C} \forall z \in \mathbb{C}$,

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| = |z - z_0| < \delta = \varepsilon.$$

即 $f(z) = z$ 在 $\mathbb{C}$ 上(一致)连续 (证了一个更强的结论).

由 Proposition 4.16, $\forall p(z) \in \mathbb{C}[z] := \langle z \rangle$, $p(z)$ 是连续的. $\square$

Exm 4.19 有理函数 $R(z) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i z^i}{\sum_{i=0}^m b_i z^i}$ 在 $\sum_{i=0}^m b_i z^i \neq 0$ 的点是连续的.

还是 Proposition 4.16.

Exm 4.20 指数函数 e^z 是 $\mathbb{C}$ 上的连续函数.

Proof: $\forall z, z_0 \in \mathbb{C}$, 若 $|z - z_0| \leq 1$, 有:

$$\begin{aligned} |e^z - e^{z_0}| &= |e^{z_0} \cdot |e^{(z-z_0)} - 1|| = |e^{z_0}| \cdot \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-z_0)^{n-1}}{n!} \right| \cdot |z-z_0| \\ &\leq |e^{z_0}| \cdot \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \right| \cdot |z-z_0| = |e^{z_0}(e-1)| \cdot |z-z_0| \end{aligned}$$

于是对 $\varepsilon > 0$, 令 $\delta := \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{|e^{z_0}(e-1)|} \right\}$, 有

$$\forall z, z_0 \in \mathbb{C} (|z - z_0| < \delta \Rightarrow |e^z - e^{z_0}| < |e^{z_0}| \cdot |e-1| \delta \leq \varepsilon)$$

即 $f(z) = e^z$ 在 $\mathbb{C}$ 上(一致)连续. (另外的证明见 Corollary 4.67) $\square$

Exm 4.21 三角函数 $\sin z, \cos z$ 是 $\mathbb{C}$ 上的连续函数.

Example 4.20 + 定义 + Proposition 4.16.

§4.3 闭区间上的连续函数.

- $\mathbb{R}$ 上的闭区间 $[a, b]$ 是一类特殊的子集:

$[a, b]$ 是闭集, 有界, 因而是紧集; 由以下定义可见 $[a, b]$ 还是连通集.

连续函数除了 §4.2 中所述的若干局部性质, 还有一些在集

合上的整体性质，其中最重要的就是连续映射保紧致性与保连通性，对应到闭区间 $[a, b]$ 上就是 Weierstrass 最值定理与 Bolzano-Cauchy 介值定理。

Def. 连通集 Connected Sets

设 $A, B \subset \mathbb{R}$, A 与 B 称为分离的, 若 $A \cap \bar{B} = \bar{A} \cap B = \emptyset$;
 $E \subset \mathbb{R}$ 称为连通集, 若不存在分离的 $A, B \neq \emptyset$ s.t. $E = A \cup B$.

Lem. 4.22 E 是连通集当且仅当 E 中既开又闭的子集只有 $\emptyset$ 和 E .

Proof: " $\Rightarrow$ " 若 E 是连通集, 设 $A \subsetneq E$ 且 $A \neq \emptyset$, 假设 A 在 E 中既开又闭, 则 $A = \bar{A}$ 且 $E \setminus A = \overline{E \setminus A}$. 于是

$$A \cap E \setminus A = \bar{A} \cap E \setminus A = A \cap E \setminus A = \emptyset \text{ 而 } E = A \cup E \setminus A.$$

即 E 不是连通集, 矛盾.

" $\Leftarrow$ " 若 E 不是连通集, 由定义有 $E = A \cup B$ 且

$$A \cap \bar{B} = \bar{A} \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cap B = \emptyset.$$

$$E = A \cup B = A \cup \bar{B} \Rightarrow E \setminus A = B = \bar{B}$$

$$\Rightarrow B \text{ 在 } E \text{ 中是闭集} \Rightarrow A \text{ 在 } E \text{ 中是开集}.$$

同理, A 在 E 中是闭集, B 在 E 中是开集.

即 A, B 在 E 中既开又闭

Rem 以上性质对任意拓扑空间都成立, 但下面的性质是 $\mathbb{R}$ 独有的.

Lem 4.23 $E \subset \mathbb{R}$ 是连通集当且仅当:

$$\forall x, y \in E \forall z \in \mathbb{R} (x < z < y \Rightarrow z \in E)$$

Proof: " $\Rightarrow$ " 若 $\exists x, y \in E \exists z \in \mathbb{R} (x < z < y \wedge z \notin E)$,

考虑 $A := E \cap (-\infty, z)$, $B := E \cap (z, +\infty)$

$(-\infty, z)$ 与 $(z, +\infty)$ 是分离的 $\Rightarrow A$ 与 B 是分离的.

而 $E = A \cup B$, 则 E 不是连通的.

" $\Leftarrow$ " 若 E 不是连通的, 存在分离的 A, B s.t. $E = A \cup B$.

取 $x \in A, y \in B$ (不妨设 $x < y$), 设 $z = \sup(A \cap [x, y])$.

$\Rightarrow z \in \bar{A} \Rightarrow z \notin B \Rightarrow x \leq z < y$.

a) 若 $z \notin A$, 则 $x < z < y$ 且 $z \notin E$;

b) 若 $z \in A$, 则 $z \notin \bar{B} \Rightarrow z \neq \inf(B \cap [x, y])$.

$\Rightarrow \exists w \in B (z < w < y) \Rightarrow x < w < y$ 且 $w \notin E$. □

Cor 4.24 $E \subset \mathbb{R}$ 是连通集 $\Leftrightarrow E$ 是 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{R}$ 上的区间.

(形如 $[a, b], (a, b], [a, b), (a, b), (-\infty, b), (a, +\infty), (-\infty, b], [a, +\infty)$ 的子集统称为区间)

Thm 4.25 连续映射保持连通性.

设 $E \subset \mathbb{R}$ 是连通集, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 在 E 上连续, 则 $f[E] \subset \mathbb{R}$ 是连通集.

Proof: 若 $f[E]$ 不是连通的, 存在分离的 A, B s.t. $f[E] = A \cup B$.

设 $G = f^{-1}[A], H = f^{-1}[B]$.

$A \subset \bar{A} \Rightarrow G \subset f^{-1}[\bar{A}]$.

$\bar{A}$ 是闭集, f 连续, 则由 Corollary 4.3, $f^{-1}[\bar{A}]$ 是闭集.

$\Rightarrow \bar{G} \subset f^{-1}[\bar{A}] \Rightarrow f[\bar{G}] \subset \bar{A}$.

由 $f[H] = B$ 且 $\bar{A} \cap B = \emptyset$, 于是 $\bar{G} \cap H = \emptyset$. 同理 $G \cap \bar{H} = \emptyset$.

即 G 与 H 分离.

$E \supset G \cup H \Rightarrow E$ 不是连通集, 矛盾. □

Cor 4.26 Bolzano-Cauchy 介值定理.

设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数, 且 $f(a) < c < f(b)$ 或 $f(b) < c < f(a)$, 则 $\exists x_0 \in (a, b) (f(x_0) = c)$.

Proof: $[a, b]$ 是连通集, f 连续, 由 Theorem 4.25, $f[[a, b]]$ 是连通集.

由 Lemma 4.23, $f(a) < c < f(b) \vee f(b) < c < f(a)$

$\Rightarrow c \in f[[a, b]] \Rightarrow \exists x_0 \in (a, b) (f(x_0) = c)$. □

Cor 4.27 零点定理.

设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数, 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则
 $\exists x_0 \in (a, b) (f(x_0) = 0)$.

Proof: $f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow f(a) < 0 < f(b) \vee f(b) < 0 < f(a)$.

应用介值定理.

Rem 在传统的分析教材中, 不引入连通性, 介值定理的证明思路是:
 实数完备定理 (确界存在/闭区间套 etc.) $\Rightarrow$ 零点定理.
 $\Rightarrow$ 介值定理.

这里给出任意一个:

Proof of IVT: 先证零点定理:

不妨设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, 且 $f(a) < 0 < f(b)$.

设 $x_1 = a, y_1 = b$. 对给定的 x_n, y_n :

a) 若 $f(\frac{x_n + y_n}{2}) = 0$, 则定理得证

b) 若 $f(\frac{x_n + y_n}{2}) < 0$, 则设 $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, y_{n+1} = y_n$.

c) 若 $f(\frac{x_n + y_n}{2}) > 0$, 则设 $x_{n+1} = x_n, y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$.

由此我们归纳地构造了序列 $\{x_n\}, \{y_n\}, [x_n, y_n] \subset [x_{n+1}, y_{n+1}]$.

且 $|y_n - x_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}} |y_1 - x_1| \rightarrow 0$ as $n \rightarrow +\infty$

由Cantor闭区间套, 存在唯一的 $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [x_n, y_n]$.

$\Rightarrow x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

由于 $\forall n \in \mathbb{N}_+ (f(x_n) \cdot f(y_n) < 0)$

$\Rightarrow 0 > \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) \cdot f(y_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$.

f 在 $[a, b]$ 上连续, $\Rightarrow f$ 在 $x = x_0$ 连续.

由Heine定理: $f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$.

$\Rightarrow (f(x_0))^2 \leq 0 \Rightarrow f(x_0) = 0$.

对 $g(a) < c < g(b)$ 的一般情况, 设 $f(x) = g(x) - c$ 后应用

零点定理即可。 ▣

Cor 4.28 连续函数的不动点定理.

设 $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ 是连续函数, 则 $\exists x_0 \in [a, b] (f(x_0) = x_0)$

Proof: 若 $f(a) = a$ 或 $f(b) = b$, 则原定理得证.

若不然, 则 $f(a) > a, f(b) < b$ ($f([a, b]) \subset [a, b]$)

设 $g(x) = f(x) - x$, 则 $g(a) > 0, g(b) < 0$.

由零点定理, $\exists x_0 \in (a, b) (g(x_0) = 0)$

$\rightarrow f(x_0) = x_0$. ▣

Rem 这个定理是 Brouwer 不动点定理的特例:

拓扑空间的紧致凸集上的连续映射有不动点.

Thm 4.29 连续映射保持紧致性.

设 $E \subset \mathbb{R}$ 是紧集, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, 则 $f[E] \subset \mathbb{R}$ 是紧集.

Proof: 考虑 $f[E]$ 的一个开覆盖 $\{G_\alpha | \alpha \in I\}$.

$f[E] \subset \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha \Rightarrow E \subset f^{-1}[\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha] = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}[G_\alpha]$

G_α 是开集, 由 Theorem 4.12, $f^{-1}[G_\alpha]$ 也是开集.

于是 $\{f^{-1}[G_\alpha] | \alpha \in I\}$ 是 E 的一个开覆盖.

E 是紧集 $\Rightarrow \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in I (E \subset \bigcup_{i=1}^n f^{-1}[G_{\alpha_i}])$

$\Rightarrow f[E] \subset f[\bigcup_{i=1}^n f^{-1}[G_{\alpha_i}]] = f[f^{-1}[\bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}]] \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$

即 $f[E]$ 存在有限子覆盖, $f[E]$ 是紧集. ▣

Rem 事实上 Theorem 4.25 & 4.29 的逆命题也成立, 我们有:

Thm 4.30 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 当且仅当:

i) 对连通集 $U \subset \mathbb{R}$, $f[U]$ 是连通集;

ii) 对紧集 $U \subset \mathbb{R}$, $f[U]$ 是紧集.

Proof: " $\Rightarrow$ " 已在 4.25 & 4.29 中证明

" $\Leftarrow$ " 假设 f 在 $p \in \mathbb{R}$ 间断. 由定义:

$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in \mathbb{R} (|x-p| < \delta \wedge |f(x) - f(p)| > \varepsilon)$

若 f 在 p 间断, 可以证明有序列 $\{x_n\}$,

满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$, 且 $\forall n \in \mathbb{N}_+ (f(x_n) = q \neq f(p))$.

假设这样的序列不存在.

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p \wedge |f(x_n) - f(p)| > \varepsilon \Rightarrow$ 每个 $f(x_i)$ 在 $\{x_n\}$ 中的逆像有限

i.e. $\forall i \in \mathbb{N}_+ f^{-1}[\{f(x_i)\}] \cap \{x_n | n \in \mathbb{N}_+\}$ 有限

$\Rightarrow \{x_n\}$ 有子列 $\{y_n\}$ s.t. f 在 $S := \{y_n | n \in \mathbb{N}_+\}$ 上是单射

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = p$, p 是 S 的唯一极限点.

$\Rightarrow S \cup \{p\}$ 是闭集. 又由 S 有界 (收敛序列有界)

$\Rightarrow S \cup \{p\}$ 是紧集 (Heine-Borel)

由题设 $f[S \cup \{p\}] = f[S] \cup \{f(p)\}$ 是紧集.

$|f(y_n) - f(p)| > \varepsilon \Rightarrow f(p)$ 不是 $f[S]$ 的极限点 $\Rightarrow f[S]$ 是紧集

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}_+$ s.t. $f(y_k)$ 是 $f[S]$ 的极限点 (Bolzano-Weierstrass)

$\Rightarrow (f[S] \cup \{f(p)\}) \setminus \{f(y_k)\} = f[S \setminus \{y_k\}] \cup \{f(p)\}$ 不紧致.

然而 $f[S \setminus \{y_k\}] \cup \{f(p)\} = f[(S \setminus \{y_k\}) \cup \{p\}]$

而 $(S \setminus \{y_k\}) \cup \{p\}$ 是紧集. 这与 f 保持紧致性矛盾.

于是上述序列 $\{x_n\}$ 存在.

对 $n \in \mathbb{N}_+$, $\exists z_n \in \{x_i | i \in \mathbb{N}_+\} (0 < |z_n - p| < \frac{1}{n})$

$\Rightarrow \exists$ 区间 $I_n (\{z_n, p\} \subset I_n \subset (p - \frac{1}{n}, p + \frac{1}{n}))$

由 f 保持连通性, $f[I_n]$ 也是区间, 且 $f(z_n) = q, f(p) \in f[I_n]$.

$\Rightarrow \exists w_n \in I_n (f(w_n) \in f[I_n] \wedge 0 < |f(w_n) - q| < \frac{1}{n})$.

于是我们构造了序列 $\{w_n\}$ s.t. $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = p$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(w_n) = q$

$\Rightarrow \{w_n | n \in \mathbb{N}_+\} \cup \{p\}$ 是紧集, 然而 $f[\{w_n | n \in \mathbb{N}_+\} \cup \{p\}]$ 不紧,

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(w_n) \neq f(p)$. 这与 f 保持紧致性矛盾.

综上, f 在每个 $p \in \mathbb{R}$ 必连续. 即 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续.

Cor 4.31 设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数, 则 $f(x)$ 有界. i.e. $f[[a, b]]$ 有界.

Proof: $[a, b]$ 是 $\mathbb{R}$ 上的有界闭集. 由 Heine-Borel 定理, $[a, b]$ 是紧集. 由 Theorem 4.29, $f[[a, b]]$ 是紧集. 即 $f[[a, b]]$ 有界. ▢

Cor 4.32 Weierstrass 最值定理.

设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数, 则 $\exists p, q \in [a, b]$:

$$f(p) = \sup_{x \in [a, b]} f(x), \quad f(q) = \inf_{x \in [a, b]} f(x).$$

即 f 在 $[a, b]$ 上有最大值与最小值.

Proof: 由 Theorem 4.29, $f[[a, b]]$ 是紧集, 即 $f[[a, b]]$ 是闭集.

而 $\sup_{x \in [a, b]} f(x), \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ 是 $f[[a, b]]$ 的极限点.

$$\Rightarrow \sup_{x \in [a, b]} f(x), \inf_{x \in [a, b]} f(x) \in f[[a, b]].$$

$$\Rightarrow \exists p, q \in [a, b] (f(p) = \sup_{x \in [a, b]} f(x) \wedge f(q) = \inf_{x \in [a, b]} f(x)).$$
 ▢

Rem 在传统的分析教材中, 不引入紧致性, Corollary 4.31 与 4.32 的证明在下面给出一例:

Proof of Boundedness:

假设 f 在 $[a, b]$ 上无界. 于是 $\forall n \in \mathbb{N}_+ \exists x_n \in [a, b] (|f(x_n)| \geq n)$.

由 Bolzano-Weierstrass 收敛子列, $\{x_n\}$ 有子列 $y_n \rightarrow p$.

由 $[a, b]$ 是闭集, p 是 $[a, b]$ 极限点, 于是 $p \in [a, b]$.

f 在 p 连续, 由 Heine 定理, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = f(p)$.

$\{f(y_n)\}$ 收敛, 因而有界. 但 $\{y_n\}$ 是 $\{x_n\}$ 子列, 即:

$$\forall n \in \mathbb{N}_+ (|f(y_n)| \geq n) \Rightarrow \{f(y_n)\} \text{ 无界, 矛盾.}$$

于是 f 在 $[a, b]$ 上有界. ▢

Proof of Corollary 4.32:

设 $M := \sup_{x \in [a, b]} f(x)$. 假设 $M \notin f[[a, b]]$.

即 $\forall x \in [a, b] (f(x) < M)$.

定义 $g(x) := \frac{1}{M - f(x)}$. 由 Proposition 4.16, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且

$g(x)$ 在 $[a, b]$ 上恒正.

由 Corollary 4.31, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

$$\exists M_0 > 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad (g(x) = \frac{1}{M - f(x)} \leq M_0)$$

$$\Rightarrow f(x) \leq M - \frac{1}{M_0} < M.$$

这与 M 是 $f(x)$ 的上确界矛盾.

Def. 一致连续 Uniform Continuity

设 $E \subset \mathbb{R}$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 在 E 上一致连续, 若:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in E \quad (|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$$

Rem 对比 $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 在 E 上连续的条件:

$$\forall x_1 \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_2 \in E \quad (|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$$

一致连续的定义中 δ 只与 ε 有关. $\delta = \delta(\varepsilon)$.

而连续的定义中 δ 与 ε, x_1 都有关. $\delta = \delta(\varepsilon, x_1)$.

可见一致连续是更强的条件, 一致连续的函数一定连续.

Rem 连续性是函数的局部(local)性质, 而一致连续性是函数的整体(global)性质.

讨论函数在某点上是否一致连续没有意义.

Def. Lipschitz 连续 Lipschitz Continuity

设 $E \subset \mathbb{R}$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 在 E 上 Lipschitz 连续, 若:

$$\exists L > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in E \quad (|f(x_1) - f(x_2)| \leq L |x_1 - x_2|)$$

Prop 4.33 从条件的强弱上说, Lipschitz 连续 $>$ 一致连续 $>$ 连续.

i.e. 设 $E \subset \mathbb{R}$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$,

i) 若 f 在 E 上 Lipschitz 连续, 则 f 在 E 上一致连续

ii) 若 f 在 E 上一致连续, 则 f 在 E 上连续.

Proof: i) f 在 E 上 Lipschitz 连续.

$$\Rightarrow \exists L > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in E \quad (|f(x_1) - f(x_2)| \leq L |x_1 - x_2|)$$

对 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon / L$

$$\Rightarrow \forall x_1, x_2 \in E (|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| < L\delta = \varepsilon)$$

$\Rightarrow f$ 在 E 上一致连续.

ii) 由定义立得. ▣

Exm 4.34 连续但不一致连续的函数:

$f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续但不一致连续.

Proof: $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上连续 (Proposition 4.16).

要证明 $f(x)$ 非一致连续, 即:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x_1, x_2 \in (0, +\infty) (|x_1 - x_2| < \delta \wedge \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| > \varepsilon)$$

$$\text{取 } \varepsilon = \frac{1}{2}, \forall \delta > 1: \text{取 } x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

$$\forall 0 < \delta < 1: \text{取 } x_1 = \delta, x_2 = \frac{\delta}{2} \Rightarrow \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| = \frac{1}{\delta} > \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

于是 $f(x)$ 非一致连续. ▣

Exm 4.35 一致连续但不 Lipschitz 连续的函数:

$f(x) = \sqrt{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续但不 Lipschitz 连续.

Proof: i) 不妨设 $x_1 \geq x_2 > 0$.

$$(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 = x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2} \leq x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_2^2} = x_1 - x_2$$

$$\Rightarrow |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| \leq \sqrt{|x_1 - x_2|}$$

对 $\varepsilon > 0$ 取 $\delta < \varepsilon^2 \Rightarrow \forall x_1, x_2 \in [0, +\infty)$:

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| = |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| \leq \sqrt{|x_1 - x_2|} = \sqrt{\delta} < \varepsilon.$$

于是 $f(x) = \sqrt{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续.

ii) 假设 $f(x) = \sqrt{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上 Lipschitz 连续.

$$\Rightarrow \exists L > 0 \forall x_1, x_2 \in [0, +\infty) (|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| \leq L|x_1 - x_2|)$$

$$\text{取 } x_2 = 0 \Rightarrow \sqrt{x_1} \leq Lx_1 \Rightarrow x_1 \geq \frac{1}{L^2}$$

然而对 $x_1 \in (0, \frac{1}{L^2})$, $\sqrt{x_1} > Lx_1$, 矛盾.

于是 $f(x) = \sqrt{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 非 Lipschitz 连续. ▢

Thm 4.36 Cantor-Heine 定理.

设 $E \subset \mathbb{R}$ 是紧集, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 在 E 上连续. 则 f 在 E 上一致连续.

Proof 1 从紧致性出发:

f 在 E 上连续 $\Rightarrow \forall x \in E \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_x > 0 \forall x' \in E$:

$$|x - x'| < \delta_x \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

定义 $I_x := (x - \frac{\delta_x}{2}, x + \frac{\delta_x}{2})$, 于是 $\{I_x | x \in E\}$ 是 E 的开覆盖.

由 Heine-Borel 定理, $\exists x_1, \dots, x_n \in E (E \subset \bigcup_{i=1}^n I_i)$.

即 $\{I_{x_i} | i=1, \dots, n\}$ 是一个有限子覆盖.

定义 $\delta := \frac{1}{2} \min \{\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_n}\}$

于是 $\forall x, x' \in E (|x - x'| < \delta)$, 有开区间 I_{x_k} s.t. $x \in I_{x_k}$.

$$\Rightarrow |x - x_k| < \frac{1}{2} \delta_{x_k}$$

$$\text{而 } |x' - x_k| \leq |x - x'| + |x - x_k| < \delta + \frac{1}{2} \delta_{x_k} \leq \delta_{x_k}.$$

由 δ_{x_k} 的定义, 有 $|f(x) - f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|f(x') - f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x')| \leq |f(x) - f(x_k)| + |f(x') - f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

于是 f 在 E 上一致连续. ▢

Rem 这里的 δ 其实是开覆盖 $\{I_x\}$ 的一个 Lebesgue 数.

即 $\forall x, x' \in E (|x - x'| < \delta \Rightarrow \exists I_{x_i} \in \{I_x\} (x, x' \in I_{x_i}))$

Lebesgue 数存在是紧集的一个性质.

Proof 2 从列紧性出发:

假设 f 在 E 上不-一致连续.

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta_n = \frac{1}{n} > 0 \exists x_n, y_n \in E (|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon)$$

由于 $\forall n \in \mathbb{N}_+ (x_n \in E)$ 且 E 是紧集, $\{x_n\}$ 有界.

由 Bolzano-Weierstrass 收敛子列定理, $\{x_n\}$ 有收敛子列 $x_{n_k} \rightarrow p$

$$\text{且 } |y_{n_k} - p| \leq |x_{n_k} - y_{n_k}| + |x_{n_k} - p| < \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - p| \rightarrow 0$$

于是 $x_{n_k} \rightarrow p$ 且 $y_{n_k} \rightarrow p$

由于 p 是 E 的极限点, $p \in E \Rightarrow f(x)$ 在 p 连续.

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = |f(p) - f(p)| = 0$$

然而 $\forall k \in \mathbb{N}_+ (|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon > 0)$. 矛盾.

$\Rightarrow f(x)$ 在 E 上一致连续. ▣

Cor 4.37 设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数, 则 f 在 $[a, b]$ 上一致连续.

$[a, b]$ 是紧集, 由 Theorem 4.36 立得.

Prop 4.38 一致连续函数把 Cauchy 列映到 Cauchy 列.

设 $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 在 E 上一致连续, $E \supset \{x_n\}$ 是 Cauchy 列.

则 $\{f(x_n)\}$ 也是 Cauchy 列.

Proof: f -一致连续 $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x' \in E (|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$

$\{x_n\}$ 是 Cauchy 列 $\Rightarrow \exists N > 0 \forall m, n > N (|x_m - x_n| < \delta)$

$$\Rightarrow \forall m, n > N (|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon)$$

$\Rightarrow \{f(x_n)\}$ 是 Cauchy 列. ▣

Prop 4.39 一致连续保持有界性.

设 $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 在 E 上一致连续, 若 E 有界, 则 $f[E]$ 有界.

Proof: 设 $a = \inf E, b = \sup E$.

取定 $\varepsilon > 0$ s.t. $\exists \delta > 0 (|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$

取 $N \in \mathbb{N}_+ (N > \frac{b-a}{\delta})$, 把 $[a, b]$ 分成 N 个闭区间:

$I_k = [a + \frac{k-1}{N}, a + \frac{k}{N}]$, $k = 1, \dots, N$. 每个区间长度小于 δ .

$\forall k = 1, \dots, N (E \cap I_k \neq \emptyset)$, 取 $x_k \in E \cap I_k$.

于是 $\forall x \in E \exists x_k (|x - x_k| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_k)| < \varepsilon$.

取 $B = \varepsilon + \max\{|f(x_k)|\}$

$$|f(x) - f(x_k)| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon + |f(x_k)| < B.$$

于是 $f[E]$ 有界. ▣

• 一些关于连续性的零散结论.

Thm 4.40 连续延拓定理.

设 $E \subset \mathbb{R}$ 是闭集, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数. 则存在连续函数 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 使得 $g|_E = f$, i.e. $\forall x \in E (g(x) = f(x))$.

$g(x)$ 称为 $f(x)$ 的连续延拓.

Proof: 设 $a = \inf E$, $b = \sup E$. 若 $a, b \in \mathbb{R}$, 则 $a, b \in E$. (E 是闭集).

E 是闭集 $\Rightarrow \mathbb{R} \setminus E$ 是开集 $\Rightarrow \mathbb{R} \setminus E$ 可以表示成至多可数个不交的开区间之并.
(表示成不交的开区间之并来自定理 [2-41], 可数则是由于 $\mathbb{R}$ 是可分的).

特别地, $\mathbb{R} \setminus E = \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i) \cup (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$

且 $\forall i \in I (a_i, b_i \in E)$.

思路是用直线把 $\mathbb{R} \setminus E$ 的每个片段连起来:

若 $a \in \mathbb{R}$, 则 $\forall x < a (g(x) := f(a))$;

若 $b \in \mathbb{R}$, 则 $\forall x > b (g(x) := f(b))$.

$\forall i \in I \forall x \in (a_i, b_i) (g(x) := f(a_i) + \frac{f(b_i) - f(a_i)}{b_i - a_i} (x - a_i))$

以及 $\forall x \in E (g(x) := f(x))$.

下面证明 $g(x)$ 是连续函数:

i) 对 $x < a$, $x > b$, $x \in (a_i, b_i)$ 的情况, $g(x)$ 是直线.

连续性自动满足.

ii) 对 $x \in E$. 由于 f 在 E 上连续.

取 $\varepsilon > 0$. $\exists \delta_1 > 0 \forall x' \in E (|x - x'| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$.

取 $x_1 \in E \cap (x - \delta_1, x)$, $x_2 \in E \cap (x, x + \delta_1)$

分3种情况 a) x_1, x_2 存在 b) x_1, x_2 存在一个 c) x_1, x_2 都不存在.

只写(a)的证明, (b), (c)太烦了从略:

定义 $\delta := \min(x - x_1, x_2 - x)$.

若 $|x - x'| < \delta$ 且 $x' \in E$, 则显然 $|g(x) - g(x')| = |f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

若 $|x-x'| < \delta$ 且 $x' \notin E$, 则 $\exists i \in I (a_i, b_i \in U^\delta(x) \wedge x' \in (a_i, b_i))$
 $\Rightarrow g(a_i), g(b_i) \in U^\varepsilon(g(x))$

若 $g(a_i) = g(b_i)$, 则 $g(x') = g(a_i) \Rightarrow |g(x) - g(x')| < \varepsilon$

若 $g(a_i) \neq g(b_i)$, 则

$$\begin{aligned} |g(x') - g(x)| &= |f(a_i) + \frac{f(b_i) - f(a_i)}{b_i - a_i} (x' - a_i)| \\ &= |\frac{b_i - x'}{b_i - a_i} (f(a_i) - f(x)) + \frac{x' - a_i}{b_i - a_i} (f(b_i) - f(x))| \\ &< \frac{b_i - x'}{b_i - a_i} \varepsilon + \frac{x' - a_i}{b_i - a_i} \varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

综上, $g(x)$ 在 $x \in E$ (且 x_1, x_2 存在) 时连续 ▣

Lem. 4.41 连续函数由它在稠密子集上的值唯一决定.

设 $U \subset E \subset \mathbb{R}$, U 在 E 中稠密 ($\bar{U} = E$), $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 和 $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $f|_U = g|_U$. 则 $f = g$. 连续函数

Proof: 只要证 $\forall x \in E \setminus U (f(x) = g(x))$:

对 $x \in E \setminus U$, x 是 U 的极限点. $\exists \{x_n\} \subset U (x_n \rightarrow x)$.

由 Heine 定理, f, g 在 x 连续 $\Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x), g(x_n) \rightarrow g(x)$.

$f|_U = g|_U \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_+ (f(x_n) = g(x_n))$.

由极限唯一性, 有 $f(x) = g(x)$. ▣

Prop. 4.42 定义在稠密子集上的一致连续函数的连续延拓.

设 $E \subset \mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密. $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 在 E 上一致连续.

则有 f 从 E 到 $\mathbb{R}$ 的唯一连续延拓.

i.e. 有唯一的连续函数 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 使得 $g|_E = f$.

Proof: 对 $p \in \mathbb{R} \setminus E$, p 是 E 的极限点. $\exists \{x_n\} \subset U (x_n \rightarrow p)$.

定义 $g(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$. 下面证明该极限存在且唯一:

存在性: $x_n \rightarrow p \Rightarrow \{x_n\}$ 是 Cauchy 列

$\Rightarrow \{f(x_n)\}$ 是 Cauchy 列 (Proposition 4.38).

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ 存在.

唯一性：设 $\{y_n\} \subset U$ ($y_n \rightarrow p$)

$$\text{定义 } z_n := \begin{cases} x_{(n+1)/2} & n \text{ even} \\ y_{n/2} & n \text{ odd} \end{cases}$$

易证 $z_n \rightarrow p \Rightarrow \{z_n\}$ 是 Cauchy 列

$\Rightarrow \{f(z_n)\}$ 是 Cauchy 列

$\Rightarrow \{f(z_n)\}$ 的子列极限唯一

由于 $\{f(x_n)\}$ 和 $\{f(y_n)\}$ 是 $\{f(z_n)\}$ 的子列，有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$ 。

现在定义 $g(x) := \begin{cases} f(x), & x \in E \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n), & x \in \mathbb{R} \setminus E, \{x_n\} \subset E \end{cases}$

可以证明 $g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续：

取定 $\varepsilon > 0$ 。 $\exists \delta > 0 \forall x, y \in E (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2})$ 。

$\forall x, y \in \mathbb{R} (|x - y| < \delta)$ ：

i) 若 $x, y \in E$ ，自然有 $|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$

ii) 若 $x \in E, y \in \mathbb{R} \setminus E$ ，考虑 $E_y := E \cap B(y, \delta - |x - y|) \neq \emptyset$

$\exists \{y_n\} \subset E_y (\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = g(y))$ 。

$\Rightarrow$ 取 $y_k \in \{y_n\}$ s.t. $|g(y) - f(y_k)| < \frac{\varepsilon}{3}$ 。

$y_k \in E_y \Rightarrow |x - y_k| \leq |x - y| + |y - y_k| < \delta$

$\Rightarrow |f(x) - f(y_k)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\Rightarrow |g(x) - g(y)| \leq |f(x) - f(y_k)| + |g(y) - f(y_k)| < \frac{2}{3} \varepsilon < \varepsilon$ 。

iii) 若 $x, y \in \mathbb{R} \setminus E$ ，考虑 $E_x = E \cap B(x, \frac{\delta - |x - y|}{2})$, $E_y = E \cap B(y, \frac{\delta - |x - y|}{2})$ 。

仿(ii)有 $x_k \in E_x, y_k \in E_y$ s.t. $|g(x) - f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{3}, |g(y) - f(y_k)| < \frac{\varepsilon}{3}$ 。

且 $|x_k - y_k| \leq |x - y| + |y - y_k| + |x - x_k|$

$< |x - y| + 2 \cdot \frac{\delta - |x - y|}{2} = \delta$

$\Rightarrow |f(x_k) - f(y_k)| < \frac{\varepsilon}{3}$ 。

于是 $|g(x) - g(y)| \leq |g(x) - f(x_k)| + |g(y) - f(y_k)| + |f(x_k) - f(y_k)|$ 。

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

综上, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 一致连续. 且 Lemma 4.41 保证 g 是唯一的. ▣

Lem. 4.43 Riesz 日出引理.

设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数. 定义阴影点集:

$$S := \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y > x (f(y) > f(x))\}.$$

则 S 是开集, 且存在至多可数个不交的开区间使 $S = \bigcup_{i \in \mathbb{I}} (a_i, b_i)$.

若 a_i, b_i 有限, 有 $f(a_i) = f(b_i)$ 且 $\forall x \in (a_i, b_i) (f(x) < f(a_i))$.

Proof: $\forall x \in S \exists y > x (\varepsilon := f(y) - f(x) > 0)$.

f 连续 $\Rightarrow \exists \delta > 0 (|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$

$\Rightarrow \forall x' \in (x - \delta, x + \delta):$

$$f(x') < f(x) + \varepsilon < f(y) \Rightarrow x' \in S$$

$\Rightarrow (x - \delta, x + \delta) \subset S$, S 是开集.

于是存在至多可数个不交的开区间使 $S = \bigcup_{i \in \mathbb{I}} (a_i, b_i)$. “日出”引理.

若 a_i 有限 (b_i 必有限), 有 $a_i, b_i \notin S$.

$$\Rightarrow \forall x > a_i (f(x) \leq f(a_i)) \Rightarrow f(b_i) \leq f(a_i).$$

由 Corollary 4.32, f 在 $[a_i, b_i]$ 上达到最值.

$$\text{即 } \exists c \in [a_i, b_i] \forall x \in [a_i, b_i] (f(x) \leq f(c)).$$

若 $c \in S$, 则 $\exists d > c (f(d) > f(c))$. $d \notin [a_i, b_i] \Rightarrow d > b_i$.

$$\text{又 } f(d) > f(c) \geq f(b_i) \Rightarrow b_i \in S. \text{ 与 } b_i \notin S \text{ 矛盾.}$$

即 $c \notin S \Rightarrow c = a_i$ 或 b_i . 而 $f(b_i) \leq f(a_i)$

$$\Rightarrow \forall x \in (a_i, b_i) (f(x) < f(b_i)). \Rightarrow f(a_i) = \lim_{x \rightarrow a_i^+} f(x) \leq f(b_i).$$

$$\Rightarrow f(a_i) = f(b_i). \quad \text{▣}$$

Rem 这个引理将在日后证明有界变差函数几乎处处可导, 以及 Hardy-Littlewood 最大函数定理时用到.

(名字很有诗意的引理呢 ~ $(\neg \nabla) \sigma$)

Thm 4.44 代数基本定理

复数域上的非常数多项式有根.

i.e. 对 $p(z) \in \mathbb{C}[z]$, 若 $\deg(p) \geq 1$, 则 $\exists z_0 \in \mathbb{C} (p(z_0) = 0)$.

Proof: 设 $p(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$. 不妨设 $a_n = 1$. 设 $\mu = \inf_{z \in \mathbb{C}} |p(z)|$.

$$\Rightarrow p(z) = z^n \left(1 + \sum_{j=1}^n \frac{a_{n-j}}{z^j} \right)$$

$$\Rightarrow |p(z)| = |z|^n \cdot \left| 1 + \sum_{j=1}^n \frac{a_{n-j}}{z^j} \right| \geq |z|^n \left(1 - \left| \sum_{j=1}^n \frac{a_{n-j}}{z^j} \right| \right)$$

$$\geq |z|^n \left(1 - \sum_{j=1}^n \frac{|a_{n-j}|}{|z|^j} \right) \rightarrow \infty \text{ as } |z| \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \exists R_0 > 0 \forall |z| > R_0 (|p(z)| > \mu)$$

$\bar{B}(0, R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$ 是 $\mathbb{C}$ 上的有界闭集, 因而是紧集.

而 $|p(z)|$ 在 $\mathbb{C}$ 上连续, 由 Corollary 4.32 (扩展于 $\mathbb{C}$ 上),

$\exists z_0 \in \bar{B}(0, R) (|p(z_0)| = \mu)$. 下面证 $\mu = 0$:

假设 $\mu > 0$, 定义 $Q(z) := p(z+z_0)/p(z_0)$.

有 $Q(0) = 1, \forall z \in \mathbb{C} (|Q(z)| \geq 1)$.

$\Rightarrow Q(z) = 1 + b_k z^k + \dots + b_n z^n$. 其中 $1 \leq k \leq n, b_k \neq 0$.

设 $b_k = \rho e^{i\varphi}$. 则对 $\theta = \frac{\pi - \varphi}{k}$:

$$b_k (e^{i\theta})^k = \rho e^{i\varphi} \cdot e^{i(\pi - \varphi)} = \rho e^{i\pi} = -\rho = -|b_k|$$

$$\Rightarrow \forall r > 0: |Q(re^{i\theta})| = |1 + b_k (re^{i\theta})^k + \dots + b_n (re^{i\theta})^n|$$

$$= |1 - r^k |b_k| + \sum_{j=k+1}^n b_j (re^{i\theta})^j|$$

$$\leq |1 - r^k |b_k|| + \sum_{j=k+1}^n |b_j (re^{i\theta})^j|$$

$$= |1 - r^k |b_k|| + r^{k+1} \sum_{j=k+1}^n |b_j| r^{j-k-1}$$

当 $0 < r < \min \{1, |b_k|^{-\frac{1}{k}}, |b_k| / \sum_{j=k+1}^n |b_j|\}$ 时:

$$|Q(re^{i\theta})| \leq 1 - r^k |b_k| + r^{k+1} \sum_{j=k+1}^n |b_j|$$

$$= 1 - r^k (|b_k| - r \sum_{j=k+1}^n |b_j|) < 1$$

这与 $|Q(z)| \geq 1$ 矛盾.

于是 $\mu = 0, \exists z_0 \in \mathbb{C} (p(z_0) = 0)$.

Cor 4.45 对复多项式 $p(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$ ($n \geq 1$), 有唯一的 $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$,
使 $p(z) = a_n(z-z_1) \cdots (z-z_n)$

Cor 4.46 实多项式 $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ ($n \geq 1$) 可以唯一分解成一次多项式与二次多项式的乘积.

§ 4.4 单调函数

Def. 单调函数 Monotonic Functions

设 $E \subset \mathbb{R}$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 称为:

- i) (单调) 递增的, 若 $\forall x_1, x_2 \in E (x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$
- ii) (单调) 递减的, 若 $\forall x_1, x_2 \in E (x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$
- iii) 严格递增的, 若 $\forall x_1, x_2 \in E (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$
- iv) 严格递减的, 若 $\forall x_1, x_2 \in E (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$.

Rem. f 严格递增(减)当且仅当 f 是递增(减)的单射.

Prop. 4.47 单调函数的单侧极限存在.

设 $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 是单调函数, 则对 $x_0 \in (a, b)$, $f(x_0+)$ 与 $f(x_0-)$ 存在,

且: i) 若 f 递增, 则 $\sup_{a < x < x_0} f(x) = f(x_0-) \leq f(x_0) \leq f(x_0+) = \inf_{x_0 < x < b} f(x)$.

ii) 若 f 递减, 则 $\inf_{a < x < x_0} f(x) = f(x_0-) \geq f(x_0) \geq f(x_0+) = \sup_{x_0 < x < b} f(x)$.

Proof: 不失一般性, 只证递增的情况:

f 递增 $\Rightarrow \forall x \in (a, x_0) (f(x_0) \leq f(x))$.

$\Rightarrow \sup \{f(x) \mid a < x < x_0\}$ 存在.

设 $l = \sup_{a < x < x_0} f(x)$, 要证 $l = f(x_0-) := \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$.

取 $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists x_\varepsilon \in (a, x_0) (f(x_\varepsilon) > l - \varepsilon)$.

f 递增 $\Rightarrow \forall x \in (x_\varepsilon, x_0) (f(x) \geq f(x_\varepsilon) > l - \varepsilon)$.

令 $\delta = x_0 - x_\varepsilon$, 即 $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) (|f(x) - l| < \varepsilon)$

$\Rightarrow l = f(x_0-)$. 同理也有 $\inf_{x_0 < x < b} f(x) = f(x_0+)$.

且 $f(x_0)$ 是 $\{f(x) \mid a < x < x_0\}$ 的上界和 $\{f(x) \mid x_0 < x < b\}$ 的下界
 $\Rightarrow f(x_0-) \leq f(x_0) \leq f(x_0+)$. ▢

Cor 4.48 单调函数没有第二类间断点

Cor 4.49 设 $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 单调, 则 f 在 $x_0 \in (a, b)$ 连续当且仅当
 $f(x_0-) = f(x_0+) = f(x_0)$.

Cor 4.50 单调函数的间断点是至多可数集.

Proof: 不妨设 $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 递增 (递减同理).

对 $x, y \in (a, b)$ 且 $x < y$, 有:

$$f(x-) \leq f(x) \leq f(x+) = \inf_{a < t < x} f(t) \leq \sup_{x < t < y} f(t) = f(y-) \leq f(y) \leq f(y+) \\ \Rightarrow (f(x-), f(x+)) \cap (f(y-), f(y+)) = \emptyset.$$

若 f 在 x_0 间断, 则 $f(x_0-) < f(x_0+)$.

由 Archimedes 性 $\exists r(x_0) \in \mathbb{Q} (f(x_0-) < r(x_0) < f(x_0+))$

且 $x_0 \neq x_1 \Rightarrow r(x_0) \neq r(x_1)$.

于是 r 是从 f 的间断点到 $\mathbb{Q}$ 的单射. f 的间断点集至多可数. ▢

Rem 事实上, 单调性是函数很好的性质. 日后会证明:

单调函数是几乎处处可导的. (Lebesgue 定理).

Exm 4.51 间断点集稠密的单调函数.

设 E 是 (a, b) 的稠密可数子集, 将 E 的元素写成序列 $\{x_n\}$.

设 $\{c_n\}$ 是正实数序列且 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛. 定义:

$$f(x) = \sum_{x_n < x} c_n, \quad x \in (a, b)$$

则 $f(x)$ 单调递增, 在 E 上间断, 在 $(a, b) \setminus E$ 上连续.

(若没有 $x_n < x$, 求和默认为 0).

该求和绝对收敛, 因此 $\{x_n\}$ 的顺序不改变函数值.

事实上这个“无限阶梯函数”是左连续的.

Prop 4.52 单调函数连续当且仅当它保持连通性

(“连通集”和“区间”在 $\mathbb{R}$ 上是等价的 (Corollary 4.24), 不作区分).

设 $E \subset \mathbb{R}$ 连通, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 单调, 则 f 在 E 上连续当且仅当 $f[E]$ 是连通集.

Proof: “ $\Rightarrow$ ” 就是 Theorem 4.25

“ $\Leftarrow$ ”: 假设 f 在 $x_0 \in E$ 间断

若 $x_0 \in E^\circ$ (x_0 是内点), 则 $f(x_0+)$, $f(x_0-)$ 存在.

$\Rightarrow (f(x_0-), f(x_0))$ 或 $(f(x_0), f(x_0+))$ 非空. 在其中取 $c \in \mathbb{R}$.

于是 $c \notin f[E]$, 且 $(-\infty, c) \cap f[E]$ 和 $f[E] \cap (c, +\infty)$ 都非空.

$\Rightarrow f[E]$ 不连通.

若 x_0 是端点, 不妨设是左端点, 即只有 $f(x_0+)$ 存在.

$\Rightarrow (f(x_0), f(x_0+)) \neq \emptyset$. 取 $c \in (f(x_0), f(x_0+)) \Rightarrow c \notin f[E]$

由 f 递增, $f[E] = \{f(x_0)\} \cup (f[E] \cap (c, +\infty))$ 不连通. ▣

Lem 4.53 设 $E \subset \mathbb{R}$ 连通, 若 $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续单射, 则 f 在 E 上严格单调.

Proof: 只要证闭区间的情况即可. 因为对任意区间 E , 存在递增的闭区间列使得 $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i]$

考虑 f 在 $[a, b]$ 上是连续单射. 不妨设 $f(a) < f(b)$ (否则考虑 $-f$)

下面证 $\forall x \in (a, b) (f(a) < f(x) < f(b))$:

假设 $\exists x \in (a, b) (f(x) < f(a) < f(b))$, 由介值定理,

$\exists x' \in [x, b] (f(x') = f(a))$, 这与 f 是单射矛盾.

$\Rightarrow \forall x \in (a, b) (f(a) < f(x))$, 同理 $f(x) < f(b)$.

考虑 $a < x < y < b$, f 在 $[a, y]$ 上是连续单射.

$\Rightarrow f(a) < f(x) < f(y)$. 于是 f 在 $[a, b]$ 上严格递增. ▣

Thm 4.54 反函数定理

设 $E \subset \mathbb{R}$ 连通, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续单射, 则反函数 (逆映射) f^{-1} 在 $f[E]$ 上连续.

Proof: 由Theorem 4.25, $f[E]$ 是连通集.

$f^{-1}: f[E] \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $f^{-1}[f[E]] = E$.

由Lemma 4.53, f 严格单调 $\Rightarrow f^{-1}$ 严格单调.

由Proposition 4.52, 因 $f^{-1}[f[E]]$ 连通, f^{-1} 在 $f[E]$ 上连续. ▣

Exm 4.55 指数函数 $\exp(x)$

回忆 $e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

有 $x > 0 \Rightarrow e^x > 1$

$\forall x < y$ ($e^y = e^x \cdot e^{(y-x)} > e^x$) . 即 e^x 在 $\mathbb{R}$ 上严格递增.

易证 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. e^x 是连续函数 (见Corollary 4.67)

即 e^x 是 $\mathbb{R}$ 到 $(0, +\infty)$ 的双射. 由反函数定理, 可以定义 $\exp$ 的反函数:

Def. 对数函数 $\ln(x)$ Logarithmic Functions

$\ln(x) := \exp^{-1}(x)$ 定义为指数函数的反函数.

$\ln: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 严格递增.

Rem 由 $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$, 有 $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

Def. (一般的) 指数函数 a^x .

$a^x := \exp(x \ln a)$ (验证这个定义与 §3.4 中的定义等价)

Rem 以下性质易证 ($x > 0$)

i) $\ln(a^x) = x \ln a$

ii) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

iii) $a^{x \cdot y} = (a^x)^y = (a^y)^x$.

§4.5 一致收敛

- 在Chapter 3中我们主要研究数项序列的收敛性. 这一节我们考虑函数项序列和级数, 引入收敛性的概念

Def. 逐点收敛 Pointwise Convergence

考虑 E 上的函数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, 若对 $x_0 \in E$ 序列 $\{f_n(x_0)\}$ 收敛, 则称 $\{f_n(x)\}$ 在 $x = x_0$ 收敛.

$\{f_n(x)\}$ 在 E 上逐点收敛, 若 $\forall x_0 \in E$ ($\{f_n(x_0)\}$ 收敛).

i.e. $\forall x \in E \exists f(x) \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}_+ \forall n > N (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$

Def. - 一致收敛 Uniform Convergence

考虑 E 上的函数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{f_n(x)\}$ 在 E 上一致收敛到 $f(x)$, 若:

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}_+ \forall n > N \forall x \in E (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$.

对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, 它一致收敛若部分和序列一致收敛.

Rem 由定义可见, 一致收敛蕴涵逐点收敛.

Rem 与连续性类似, 逐点收敛表现的是函数列局部性质, 而一致收敛是函数列的整体性质.

- 一致收敛的定义等价于:

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}_+ \forall n > N (\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$.

这正是把函数视为度量空间的元素, 装备度量 $d(f, g) = \sup_{x \in E} |f(x) - g(x)|$ 后, 序列收敛的定义.

Thm 4.56 $\{f_n\}$ 一致收敛于 f , 当且仅当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

Proof: $f_n \xrightarrow{u} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}_+ \forall n > N \forall x \in E (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}_+ \forall n > N (\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$

$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = 0$. ▣

Lem 4.57 $\{f_n\}$ 在 E 上一致收敛于 f , 当且仅当 $\forall \{x_n\} \subset E (\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| = 0)$.

Proof: " $\Rightarrow$ ": $f_n \xrightarrow{u} f \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = 0$

$\forall \{x_n\} \subset E (0 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} |f_n(x_n) - f(x_n)|$
 $\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = 0)$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| = 0$

" $\Leftarrow$ ": 若 f_n 不一致收敛于 f , 由定义:

$\exists \varepsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N}_+ \exists x_n \in E (|f_n(x_n) - f(x_n)| > \varepsilon)$
 于是 $\{x_n\} \subset E$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| \neq 0$. ▣

Thm 4.58 一致收敛的 Cauchy 准则

设对 $n \in \mathbb{N}_+$, $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subset \mathbb{R}$). $\{f_n\}$ 在 E 上一致收敛, 当且仅当:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n > N \left(\sup_{x \in E} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \right)$$

(这说明函数空间 $\mathbb{R}^E$ 是 Cauchy 完备的)

Proof: " $\Rightarrow$ " 取 $\varepsilon > 0$, $f_n \xrightarrow{u} f \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n > N$:

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sup_{x \in E} |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in E} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| + \sup_{x \in E} |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

" $\Leftarrow$ " 取 $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$:

$$\forall m, n > N \forall x \in E (|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon).$$

即对每个 $x \in E$, $\{f_n(x)\}$ 都是 Cauchy 列, 设其收敛到 $f(x)$.

固定 $n > N$, 由 $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) = f(x)$ 有:

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$$

$\Rightarrow \{f_n\}$ 一致收敛到 f . ▣

Cor 4.59 级数一致收敛的 Cauchy 准则

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 E 上一致收敛, 当且仅当:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m > n > N \left(\sup_{x \in E} \left| \sum_{i=n+1}^m f_i(x) \right| < \varepsilon \right)$$

Thm 4.60 Weierstrass-M 判别法

设 $\{f_n\}$ 是 E 上的函数列, $\{M_n\}$ 是非负数列, 且满足:

$$\forall n \in \mathbb{N}_+ \forall x \in E (|f_n(x)| \leq M_n).$$

若 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 E 上一致收敛, 且有:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} M_n.$$

Proof: 设部分和序列 $S_n(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)$.

$\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 收敛, 由 Cauchy 准则, $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m > n > N$:

$$\sum_{i=n+1}^m M_i < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall x \in E \left(|S_m(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{i=n+1}^m f_i(x) \right| \leq \sum_{i=n+1}^m |f_i(x)| \leq \sum_{i=n+1}^m M_i < \varepsilon \right)$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in E} |S_m(x) - S_n(x)| < \varepsilon.$$

由 Cauchy 准则, $S_n(x) \xrightarrow{u} S(x)$ i.e. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ - 一致收敛. ▣

Thm 4.61 设 $\{f_n\}$ 在 E 上一致收敛到 f , 设 p 是 E 的极限点.

若 $\lim_{x \rightarrow p} f_n(x) = a_n$, 则 $\{a_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

$$\text{i.e. } \lim_{x \rightarrow p} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow p} f_n(x).$$

Proof: 取 $\varepsilon > 0$, 由 $f_n \xrightarrow{u} f$ 的 Cauchy 准则, $\exists N \in \mathbb{N}_+ \forall m, n > N$:

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

由 $\lim_{x \rightarrow p} f_n(x) = a_n$, $\lim_{x \rightarrow p} f_m(x) = a_m$, 有:

$$\exists \delta_n > 0 \forall x \in E (0 < |x - p| < \delta_n \Rightarrow |f_n(x) - a_n| < \frac{\varepsilon}{3})$$

$$\exists \delta_m > 0 \forall x \in E (0 < |x - p| < \delta_m \Rightarrow |f_m(x) - a_m| < \frac{\varepsilon}{3}).$$

于是对 $0 < |x - p| < \min\{\delta_n, \delta_m\}$, 有:

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &\leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_n(x) - a_n| + |f_m(x) - a_m| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \{a_n\}$ 是 Cauchy 列 $\Rightarrow \{a_n\}$ 收敛. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

由 $f_n \xrightarrow{u} f$, $\exists N_1 \in \mathbb{N} \forall k > N_1 (\sup_{x \in E} |f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3})$

$a_n \rightarrow a$, $\exists N_2 \in \mathbb{N} \forall k > N_2 (|a_k - a| < \frac{\varepsilon}{3}).$

取 $k > \max\{N_1, N_2\}$, 有:

$$\exists \delta_k > 0 \forall x \in E (0 < |x - p| < \delta_k \Rightarrow |f_k(x) - a_k| < \frac{\varepsilon}{3})$$

于是对 $0 < |x - p| < \delta_k$, 有:

$$\begin{aligned} |f(x) - a| &\leq |f_k(x) - a_k| + |f_k(x) - f(x)| + |a_k - a| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow p} f(x) = a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow p} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow p} f_n(x) \quad \text{▣}$$

Cor 4.62 一致收敛保持连续性

设 E 上的连续函数序列 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛到 $f(x)$, 则 $f(x)$ 在 E 上连续.

Proof: 对 $p \in E$, 有 $\forall n \in \mathbb{N}_+$ ($\lim_{x \rightarrow p} f_n(x) = f_n(p)$)

由 Theorem 4.61, $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(p) = f(p) \Rightarrow f$ 在 $p \in E$ 连续.

$\Rightarrow f$ 在 E 上连续. ▣

~~Rem 这个推论有一个类似逆定理的结论~~

Thm 4.63 Dini 定理

设 E 上的连续函数序列 $\{f_n(x)\}$ 逐点收敛到 $f(x)$, f 也在 E 上连续.

并且 $\{f_n(x)\}$ 单调 (例如 $\forall n \in \mathbb{N}_+ \forall x \in E (f_n(x) \geq f_{n+1}(x))$),

则 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛到 $f(x)$. (E 是紧集).

Proof: 设 $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$. 不妨设 f_n 递减, 否则考虑 $-g_n$.

于是 g_n 连续, g_n 逐点收敛于 0, g_n 递减.

取 $\varepsilon > 0$, 定义 $E_n := \{x \in E \mid g_n(x) > \varepsilon\}$.

注意 $E_n = g_n^{-1}[(\varepsilon, +\infty))$ 而 $(\varepsilon, +\infty)$ 是闭集.

由 Theorem 4.12, E_n 是闭集.

由 $g_n \geq g_{n+1}$, 易得 $E_n \supset E_{n+1}$. 即 $\{E_n\}$ 是递减的闭集套.

设 $\exists x \in E (x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n)$. 即 $\forall n \in \mathbb{N}_+ (g_n(x) > \varepsilon)$.

这与 $g_n(x) \rightarrow 0$ 矛盾. $\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$.

由 Cantor 闭集套, $\exists N \in \mathbb{N} (E_N = \emptyset)$.

$\Rightarrow \forall n > N \forall x \in E (0 \leq g_n(x) < \varepsilon) \Rightarrow g_n \xrightarrow{u} 0$.

即 f_n 一致收敛到 0. ▣

• 接下来研究幂级数的一致收敛性:

Thm 4.64 一致收敛保持连续性 (级数版).

设每个 f_n 在 E 上连续, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 一致收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 E 上连续.

有 $\lim_{x \rightarrow p} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow p} f_n(x)$.

一致收敛使求和与求极限“可交换”。

Thm 4.65 幂级数的一致收敛。

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$, 其收敛半径 $R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} |C_n|^{1/n}}$

(Cauchy-Hadamard 公式, 见 Theorem 3.39)

对任意 $r \in [0, R)$, $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ 在 $\bar{B}(0, r)$ 上一致收敛。

Proof: 对 $r \in [0, R)$, 取 $k \in (r, R)$ 。

由 Theorem 3.39(i), $\sum_{n=0}^{\infty} C_n k^n$ 绝对收敛 $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |C_n| k^n$ 收敛。

对 $z \in \bar{B}(0, r)$, $|z| < k$

$\Rightarrow |C_n z^n| = |C_n| \cdot |z|^n < |C_n| k^n$. 令 $M_n = |C_n| k^n$

由 Weierstrass-M 判别法, $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ 在 $\bar{B}(0, r)$ 上一致收敛。 ▣

Rem $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ 在 $B(0, R)$ 上未必一致收敛!

Cor 4.66 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ 收敛半径为 R , 则 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ 在 $B(0, R)$ 上连续。

Proof: Theorem 4.64 + 4.65 表明, 对 $r \in [0, R)$, $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ 在 $\bar{B}(0, r)$ 上连续。

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ 在 $B(0, R)$ 上连续 (连续是局部性质)。 ▣

Cor 4.67 $\exp(z)$, $\sin(z)$, $\cos(z)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的连续函数。

$\exp, \sin, \cos$ 收敛半径无穷大。 (另外的证明见 Example 4.20)

Cor 4.68 $\ln(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的连续函数。

反函数定理。

Thm 4.69 Abel 幂级数第二定理

若 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ 在 $z \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$ 上一致收敛。

且 $\lim_{z \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n$ 。

Proof: 取 $\varepsilon > 0$ 。由 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n$ 收敛, 有 $\exists N \in \mathbb{N} \forall m > n > N (|\sum_{i=n+1}^m C_i| < \varepsilon)$

固定 $n > N$, 设 $t_k = \sum_{i=n+1}^k C_i (k \geq n+1)$. 令 $t_n = 0$ 。

$\Rightarrow \forall k \geq n (|t_k| < \varepsilon)$ 且 $a_k = t_k - t_{k-1}$ 。

Abel 求和: $\sum_{k=n+1}^m C_k z^k = \sum_{k=n+1}^m (t_k - t_{k-1}) z^k$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=n+1}^m t_k z^k - \sum_{k=n+1}^m t_{k-1} z^k \\
&= \sum_{k=n+1}^{m-1} t_k (z^k - z^{k+1}) + t_m z^m \quad (\text{分部积分的离散形式}) \\
\Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^m C_k z^k \right| &\leq \sum_{k=n+1}^{m-1} |t_k| \cdot (z^k - z^{k+1}) + |t_m| z^m \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{m-1} \varepsilon (z^k - z^{k+1}) + \varepsilon z^m \\
&= \varepsilon z^{n+1} \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

由Cauchy准则, $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n \text{ 在 } [0, 1] \text{ 上连续} \Rightarrow \lim_{z \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n.$$

Cor 4.70 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 收敛, $C_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ 且 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n$ 收敛.

$$\text{则 } \sum_{n=0}^{\infty} C_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right)$$

Proof. 令 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$.

由Abel第二定理, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n$

$$f(x) \cdot g(x) = h(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} C_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right)$$

§4.6 连续函数空间

Def. 连续函数空间 Space of Continuous Functions

全体 $E \rightarrow \mathbb{R}$ 的连续函数的集合记为 $C(E)$ 或 $C^0(E)$.

Rem. 注意区分 $C(E)$ 与 $C^1(E)$. 后者指 E 上的全体连续可微函数.

Rem. $C(E)$ 对函数的加法与数乘构成向量空间, 对函数的加法与乘法构成交换幺环, 它的全体极大理想为 $I_x := \{f \in C(E) \mid f(x) = 0\}$ for all $x \in E$. 若 E 是紧集, 装备内积 $\langle f, g \rangle := \int_E f(x) g(x) dx$ 的 $C(E)$ 构成内积空间; 装备范数 $\|f\| := \sup_{x \in E} |f(x)|$ 的 $C(E)$ 是 Banach 空间.

Def. 等度连续 Equicontinuity

设 $\mathcal{F}$ 是一些 $E \rightarrow \mathbb{R}$ 的函数的集合, $\mathcal{F}$ 称为等度连续的, 若:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall f \in \mathcal{F} \forall x, y \in E (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

Rem. 显然等度连续函数族中每个函数都在 E 上一致连续.

Def. 逐点有界 Pointwise Boundedness

函数列 $\{f_n\}$ 在 E 上逐点有界, 若存在 $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ 使得

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ \forall x \in E (|f_n(x)| < \varphi(x))$$

换言之, $f_n(x)$ 对每个 $x \in E$ 都有界.

Def. 一致有界 Uniform Boundedness.

函数列 $\{f_n\}$ 在 E 上一致有界, 若存在 $M \in \mathbb{R}$ 使得

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ \forall x \in E (|f_n(x)| < M).$$

Prop 4.71 设 $E \subset \mathbb{R}$ 是紧集, $\forall n \in \mathbb{N}^+ (f_n \in C(E))$. 若 $\{f_n\}$ 在 E 上一致收敛, 则 $\{f_n\}$ 在 E 上等度连续.

Proof. 由 Heine-Cantor 定理, 紧集 E 上的连续函数 f_n 也是一致连续的.

固定 $\varepsilon > 0$. 由 $\{f_n\}$ 一致收敛的 Cauchy 准则:

$$\exists N \in \mathbb{N}^+ \forall n > N \left(\sup_{x \in E} |f_n(x) - f_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \right)$$

对 $i \in \{1, \dots, N\}$, 由 f_i 的一致连续:

$$\exists \delta_i > 0 \forall x, y \in E (|x - y| < \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - f_i(y)| < \frac{\varepsilon}{3}).$$

令 $\delta = \min_{1 \leq i \leq N} \delta_i \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, N\} \forall x, y \in E$:

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f_i(x) - f_i(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

对 $n > N$: 若 $|x - y| < \delta$, 则:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(y)| &\leq |f_n(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f_n(y)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

于是 $\forall f_i \in \{f_n\} \forall x, y \in E (|x - y| < \delta \Rightarrow |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon)$

$\Rightarrow \{f_n\}$ 等度连续. ▣

Rem. Bolzano-Weierstrass 定理表明 $\mathbb{R}$ 上的有界数列必有收敛子列. 我们希望对 $\mathbb{R}$ 上的连续函数序列给出类似结论, 研究何种条件下存在逐点收敛/一致收敛的子列.

Lem 4.72 设 $E \subset \mathbb{R}$, $\{f_n\} \subset C(E)$ 等度连续且逐点有界.

则 $\{f_n\}$ 有子列逐点收敛到 $f: E \rightarrow \mathbb{R}$.

Proof 设 $D \subset E$ 是一个在 E 中稠密的可数集

(D 的存在性是因为 $\mathbb{R}$ 可分, 所以 $E \subset \mathbb{R}$ 也可分).

我们只要证明 $\{f_n\} \subset C(D)$ 有子列逐点收敛到 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, 然后利用 Lemma 4.41 的结论推到 E 上.

(对角线法) 设 D 可以写成 $\{x_1, x_2, \dots\} = \{x_j\}_{j=1}^{\infty}$.

序列 $\{f_n(x_1)\}_{n=1}^{\infty}$ 有界, 由 Bolzano-Weierstrass 定理, 它有收敛子列.

即一个单调递增的映射 $\mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}^+$, $n \mapsto s(1, n)$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{s(1, n)}(x_1) = a_1 \in \mathbb{R}$$

类似地, 对 $x_2 \in D$, 有 $n \mapsto s(2, n)$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{s(2, n)}(x_2) = a_2$.

归纳地, 我们得到一个双重数列 $s(j, n)$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{s(j, n)}(x_j) = a_j$.

定义 $f|_D: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f|_D(x_j) = a_j$ 对 $j \in \mathbb{N}^+$.

现在考虑 $s(j, n)$ 的“对角线”: $\{s(k, k)\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $s(j, n)$ 的一个子列.

于是 $\{f_{s(k, k)}\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\{f_n\}$ 的一个子列, 且有:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{s(k, k)}(x_j) = a_j = f(x_j)$$

于是 $f_{s(k, k)}$ 逐点收敛到 $f|_D$. 为了方便令 $\{g_n\} := \{f_{s(k, k)}\}$.

对 $x_0 \in E \setminus D$, 由 $\{g_n\}$ 等度连续: 固定 $\varepsilon > 0$, 有 $\delta > 0$:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |g_n(x) - g_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

由 D 在 E 中稠密, 取 $x_1 \in D \cap B(x_0, \delta)$. $\{g_n(x_1)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 列.

对充分大的 m, n : $|g_m(x_0) - g_n(x_0)|$

$$\leq |g_m(x_0) - g_m(x_1)| + |g_m(x_1) - g_n(x_1)| + |g_n(x_1) - g_n(x_0)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

$\Rightarrow \{g_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 列 $\Rightarrow \{g_n\}$ 在 $x_0 \in E \setminus D$ 上收敛

$\Rightarrow \{g_n\}$ 在 E 上逐点收敛. $\{f_n\}$ 在 E 上有逐点收敛子列. 

Thm 4.73 Arzelà-Ascoli 定理

设 $E \subset \mathbb{R}$ 是紧集, $\{f_n\} \subset C(E)$ 等度连续且逐点有界.

则 $\{f_n\}$ 有子列一致收敛到 $f \in C(E)$.

Proof. 由 Lemma 4.72, 我们已经证明了 $\{f_n\}$ 有子列 $\{g_n\}$ 逐点收敛. 于是只要证 $g_n \xrightarrow{u} f$, 而 $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 连续由 Corollary 4.62 立得.

由 $\{g_n\}$ 等度连续, 固定 $\varepsilon > 0$, 有 $\delta > 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ \forall x, y \in E (|x - y| < \delta \Rightarrow |g_n(x) - g_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3})$$

$\{B(x, \delta) \mid x \in E\}$ 是 E 的一个开覆盖, 由 E 是紧集, 它有有限子覆盖: $E \subset \bigcup_{i=1}^m B(x_i, \delta)$.

对 $x \in E$, 有 $x \in B(x_i, \delta) \Rightarrow |x - x_i| < \delta$

$\{g_n(x_i)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 列. $\exists N \in \mathbb{N} \forall m, n > N (|g_n(x_i) - g_m(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3})$

$$\Rightarrow \forall x \in E: |g_m(x) - g_n(x)| \leq |g_m(x) - g_m(x_i)| + |g_m(x_i) - g_n(x_i)| + |g_n(x_i) - g_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

$\Rightarrow \sup_{x \in E} |g_m(x) - g_n(x)| < \varepsilon$. 由 Cauchy 准则 $\{g_n\}$ 一致收敛. ▣

Rem. 定理中的逐点有界其实是一致有界, 因为:

Prop. 4.74 设 $E \subset \mathbb{R}$ 是紧集, $\{f_n\} \subset C(E)$ 等度连续且逐点有界, 则 $\{f_n\}$ 一致有界.

Proof. $\{B(x_i, \delta) \mid i \in \{1, \dots, m\}\}$ 是 E 的有限开覆盖.

$\{f_n\}$ 逐点有界 $\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, m\} \forall n \in \mathbb{N}^+ \exists M_i \in \mathbb{R}$:

$$|f_n(x_i)| \leq M_i$$

$$\text{令 } M = \max_{1 \leq i \leq m} (M_i + \varepsilon).$$

则 $\forall x \in E$, 有 $x \in B(x_i, \delta) \Rightarrow |x - x_i| < \delta$

$$\Rightarrow |f_n(x)| < |f_n(x_i)| + \varepsilon \leq M_i + \varepsilon \leq M$$

$\Rightarrow \{f_n\}$ 一致有界. ▣

Rem. Heine-Borel 定理表明了 $\mathbb{R}$ 的子集是紧集当且仅当是有界闭集.

这对连续函数空间 $C(E)$ 的子集是不成立的. Arzelà-Ascoli 定理部分证明了 $C(E)$ 作为度量空间 (装备上确界度量), 其子集成为紧集的等价条件:

Thm 4.75 设 $E \subset \mathbb{R}$ 是紧集, $\mathcal{F} \subset C(E)$ 是紧集, 当且仅当 $\mathcal{F}$ 是闭集, 等度连续且逐点有界 (=一致有界)

Proof. Arzelà-Ascoli 定理证明了充分性. ($\mathcal{F}$ 有一致收敛子列是 $\mathcal{F}$ 的列紧性, 与紧致性等价)

必要性: Proposition 4.71 已证等度连续.

紧致性推出有界闭性是度量空间的一般性质. □